Lösungen - Exponentialfunktionen und Wachstum

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f(-2) = 3 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}75$; $f(-1) = 1{,}5$; $f(0) = 3$; $f(1) = 6$; $f(2) = 12$; $f(3) = 24$. Ein negativer Exponent bedeutet den Kehrwert: $2^{-2} = \frac{1}{4}$.
b) $g(-2) = 4 \cdot 4 = 16$; $g(-1) = 8$; $g(0) = 4$; $g(1) = 2$; $g(2) = 1$; $g(3) = 0{,}5$. Hier ist $0{,}5^{-2} = 2^2 = 4$; deshalb sind die Werte links größer.
c) f wächst, jeder Wert ist das Doppelte des vorigen (Faktor 2). g fällt, jeder Wert ist die Hälfte des vorigen (Faktor 0,5). Den Faktor erkennt man am Quotienten zweier benachbarter Werte.

Lösung zu Aufgabe 2

a) 5 %: $b = 1{,}05$; $-12\,\%$: $b = 0{,}88$; $+150\,\%$: $b = 2{,}5$; $-0{,}5\,\%$: $b = 0{,}995$. Bei einer Zunahme addiert man den Prozentsatz als Dezimalzahl zu 1, bei einer Abnahme subtrahiert man ihn. 150 % Zunahme bedeutet $1 + 1{,}5$.
b) Faktor 1,2: Zunahme um 20 %; Faktor 0,7: Abnahme um 30 %. Der Abstand des Faktors von 1 ist die prozentuale Änderung.
c) $1{,}1^2 = 1{,}21$, also insgesamt 21 % und nicht 20 %. Zwei Zunahmen um 10 % werden multipliziert, nicht addiert; deshalb kommt 1 % „Zins auf den Zins“ hinzu.

Lösung zu Aufgabe 3

a) A: Quotienten $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$: exponentiell. B: Differenzen $3; 3; 3$: linear. Bei exponentiellem Wachstum sind die Quotienten benachbarter Werte gleich, bei linearem die Differenzen.
b) C: Quotienten $\frac{40}{80} = \frac{20}{40} = \frac{10}{20} = 0{,}5$: exponentiell. D: Quotienten $0{,}9$ und $\frac{81}{90} = 0{,}9$, $\frac{72{,}9}{81} = 0{,}9$: exponentiell. Ein Quotient kleiner als 1 bedeutet exponentielle Abnahme.
c) A: $f(x) = 2 \cdot 3^x$. C: $f(x) = 80 \cdot 0{,}5^x$. D: $f(x) = 100 \cdot 0{,}9^x$. Der Anfangswert bei $x = 0$ ist a, der gemeinsame Quotient ist b.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $a = f(0) = 3$; $b^2 = \frac{12}{3} = 4$, $b = 2$. Also $f(x) = 3 \cdot 2^x$. Der Punkt mit $x = 0$ liefert direkt a; zwischen $x = 0$ und $x = 2$ wird zweimal mit b multipliziert. Probe: $3 \cdot 2^2 = 12$.
b) $b^2 = \frac{54}{6} = 9$, $b = 3$; $a = \frac{6}{3} = 2$. Also $f(x) = 2 \cdot 3^x$. Zwischen $x = 1$ und $x = 3$ liegen zwei Schritte, deshalb teilt man die y-Werte und zieht die Wurzel. Probe: $2 \cdot 27 = 54$.
c) $b = \frac{5}{10} = 0{,}5$; $a = \frac{10}{0{,}5} = 20$. Also $f(x) = 20 \cdot 0{,}5^x$. Benachbarte x-Werte: Der Quotient ist direkt b; dann teilt man durch b, um a zu erhalten.
d) $b^2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $b = 0{,}5$; $a \cdot 0{,}5^{-1} = 8$, also $a = 4$. Probe: $4 \cdot 0{,}5 = 2$. Also $f(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$.

Man teilt die y-Werte, um a zu eliminieren, und erhält b^2.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Asymptote $y = 1$; $f(0) = 2$; Verschiebung um 1 nach oben. Ein Summand außerhalb der Potenz verschiebt den Graphen und seine Asymptote nach oben.
b) Asymptote $y = -3$; $g(0) = -2$; Verschiebung um 3 nach unten. Der Graph schneidet jetzt die x-Achse, weil er unter die Achse verschoben ist.
c) Asymptote $y = 0$; $h(0) = 2$; Verschiebung um 1 nach links (gleichwertig: Streckung in y-Richtung mit Faktor 2). Wegen $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ ist die Verschiebung nach links dasselbe wie eine Streckung.
d) Asymptote $y = 0$; $k(0) = -1$; Spiegelung an der x-Achse. Das Minuszeichen vor der Potenz spiegelt den Graphen; alle Werte sind negativ.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $K(n) = 2500 \cdot 1{,}03^n$. Anfangskapital mal Zinsfaktor $1{,}03$ hoch Anzahl der Jahre.
b) $K(5) = 2500 \cdot 1{,}03^5 \approx 2898{,}19$ €; $K(10) \approx 3359{,}79$ €. Man setzt $n = 5$ und $n = 10$ ein.
c) $3359{,}79 - 2500 = 859{,}79$ €. Die Zinsen sind die Differenz zum Anfangskapital.
d) Faustregel: $\frac{72}{3} = 24$ Jahre. Exakt: $1{,}03^{23} \approx 1{,}974$ und $1{,}03^{24} \approx 2{,}033$: nach etwa 24 Jahren ($23{,}45$ Jahre). Man probiert Jahre, bis der Faktor 2 übersteigt; die Faustregel liefert eine gute Schätzung.

Lösung zu Aufgabe 7

a) 3 h sind 6 Verdopplungen: $500 \cdot 2^6 = 32\,000$. 4,5 h sind 9 Verdopplungen: $500 \cdot 2^9 = 256\,000$. Man zählt die Verdopplungen: 30 Minuten pro Verdopplung.
b) In einer Stunde zwei Verdopplungen: $N(t) = 500 \cdot 4^t$ (gleichwertig $500 \cdot 2^{2t}$). Da sich die Zahl pro Stunde vervierfacht, ist der Stundenfaktor 4.
c) $500 \cdot 2^k > 1\,000\,000$ gilt für $2^k > 2000$. Wegen $2^{10} = 1024$ und $2^{11} = 2048$ braucht man 11 Verdopplungen, also $5{,}5$ Stunden. Man probiert Zweierpotenzen bis 2000.
d) Nach einigen Tagen wäre die Masse der Bakterien größer als die Erde. In Wirklichkeit werden Nährstoffe und Platz knapp, das Wachstum bremst sich ab. Exponentielles Wachstum kann in der Natur nie lange anhalten.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $24\,000 \cdot 0{,}85 = 20\,400$; $\cdot 0{,}85 = 17\,340$; dann $14\,739$ €. Jedes Jahr wird mit 0,85 multipliziert.
b) $24\,000 \cdot 0{,}85^5 \approx 10\,649$ €, das sind $0{,}85^5 \approx 44{,}4\,\%$ des Neupreises. Man setzt 5 Jahre ein und teilt durch den Neupreis.
c) $24\,000 \cdot 0{,}85^6 \approx 9052$; $24\,000 \cdot 0{,}85^7 \approx 7694$. Also nach 7 Jahren. Man probiert ganze Jahre, bis der Wert unter 8000 € fällt.
d) Linear: $24\,000 - 5 \cdot 3000 = 9000$ €. Exponentiell: $10\,649$ €. Das Auto mit exponentiellem Verlust ist nach 5 Jahren noch mehr wert, verliert aber im ersten Jahr mit 3600 € mehr als das andere mit 3000 €. Der prozentuale Verlust ist anfangs größer,

später kleiner als ein fester Betrag.

Lösung zu Aufgabe 9

a) A: $1000 \cdot 1{,}025^{20} \approx 1638{,}62$ €. B: $1000 + 20 \cdot 25 = 1500$ €. A rechnet mit Zinseszins, B addiert jedes Jahr denselben Betrag.
b) Differenz: $1638{,}62 - 1500 = 138{,}62$ €. Der Unterschied entsteht nur durch die Zinseszinsen.
c) Faustregel $\frac{72}{2{,}5} \approx 29$ Jahre. Genau: $1{,}025^{28} \approx 1{,}996$, $1{,}025^{29} \approx 2{,}046$: nach 29 Jahren. Man probiert Jahre in der Nähe des Faustregelwertes.
d) B: Zuwachs 25 € pro Jahr, für 1000 € zusätzlich sind 40 Jahre nötig. Bei festen Zinsen braucht man $1000 : 25$ Jahre für eine Verdopplung.

Lösung zu Aufgabe 10

a) 80 mg → 40 mg → 20 mg → 10 mg. Nach jeder Halbwertszeit von 8 Tagen halbiert sich die Menge.
b) $m(t) = 80 \cdot 0{,}5^{t/8}$. Weil der Faktor 0,5 für 8 Tage gilt, steht $\frac{t}{8}$ im Exponenten.
c) $m(20) = 80 \cdot 0{,}5^{2{,}5} \approx 14{,}14$ mg. 20 Tage sind 2,5 Halbwertszeiten.
d) $0{,}5^{t/8}$ gilt für $2^{t/8} > 80$; wegen $2^6 = 64$ und $2^7 = 128$ ist $\frac{t}{8} > 6{,}32$, also $t > 50{,}6$ Tage, nach 51 Tagen. Man vergleicht mit Zweierpotenzen oder rechnet mit dem Logarithmus.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Es bleiben 80 %: $b = 0{,}8$. Bei 20 % Abbau bleiben 80 % übrig.
b) $200 \cdot 0{,}8^3 = 102{,}4$ mg. Man multipliziert dreimal mit 0,8.
c) $0{,}8^t$: $0{,}8^6 \approx 0{,}262$, $0{,}8^7 \approx 0{,}210$. Unter 50 mg ist es nach 7 Stunden (genau $t = 6{,}21$ h). 50 mg sind ein Viertel der Anfangsmenge. Antwort: Nach gut 6 Stunden reicht die Wirkung nicht mehr.
d) $0{,}8^t = 0{,}5$: $t = 3{,}11$ h, also nach etwa 3 Stunden. Die Halbwertszeit ist die Zeit bis zur halben Menge.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $120\,000 \cdot 1{,}018^{10} \approx 143\,436$. Wachstumsfaktor 1,018 für zehn Jahre.
b) $8000 \cdot 0{,}98^{10} \approx 6537$. Abnahmefaktor 0,98 für zehn Jahre.
c) $0{,}98^t = 0{,}5$: $t = 34{,}3$ Jahre; die Faustregel $\frac{72}{2} = 36$ Jahre liegt nahe. Die Halbwertszeit bestimmt man mit dem Logarithmus; die Faustregel gilt auch für Abnahme.
d) $1{,}018^t = 2$: $t = 38{,}9$ Jahre; Faustregel $\frac{72}{1{,}8} = 40$ Jahre. Die Verdopplungszeit erhält man genauso mit dem Faktor 2.

Lösung zu Aufgabe 13

a) 2; 4; 8; 16. Jede Woche verdoppelt sich die Fläche.
b) $2^t = 256$: $t = 8$ Wochen. Man sucht die Zweierpotenz 256.

c) Die Hälfte (128 m²) ist nach 7 Wochen erreicht, danach bleibt nur noch 1 Woche. Weil sich die Fläche verdoppelt, ist eine Woche vor dem vollen Teich die Hälfte bedeckt.
d) $1{,}5^t = 256$: $t = 13{,}7$, also nach 14 Wochen ($1{,}5^{13} \approx 195$, $1{,}5^{14} \approx 292$). Bei langsamerem Wachstum dauert es länger; man rechnet mit dem Logarithmus.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Unterschied: $70 \to 49{,}0 \to 34{,}3 \to 24{,}0$. Temperatur: $90 \to 69 \to 54{,}3 \to 44{,}0$ °C. Man multipliziert den Unterschied alle 5 Minuten mit 0,7 und addiert die Zimmertemperatur.
b) $D(t) = 70 \cdot 0{,}7^{t/5}$. Weil der Faktor für 5 Minuten gilt, steht $\frac{t}{5}$ im Exponenten.
c) $70 \cdot 0{,}7^{t/5} \leq 40$: $0{,}7^{t/5} \leq 0{,}571$, $\frac{t}{5} \geq 1{,}57$, also $t \geq 7{,}8$ min (etwa 8 Minuten). 60 °C bedeuten einen Unterschied von 40 °C; man löst mit dem Logarithmus.
d) $D(60) = 70 \cdot 0{,}7^{12} \approx 0{,}97$, also $T \approx 20{,}9$ °C. Die Temperatur nähert sich der Zimmertemperatur, erreicht sie aber nie. Der Unterschied wird beliebig klein, aber nie null.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $A(n) = 2000 \cdot 1{,}035^n$, $B(n) = 2000 + 80n$. A wächst exponentiell, B linear.
b) A: 2375; 2821; 3351; 3980 €. B: 2400; 2800; 3200; 3600 €. Man setzt 5, 10, 15 und 20 Jahre ein.
c) Jahr 8: $A \approx 2634$; Jahr 9: $A \approx 2726 > 2720$. Ab dem 9. Jahr ist A besser. Man vergleicht beide Angebote Jahr für Jahr.
d) Für 5 Jahre ist B besser (2400 € gegen 2375 €), für 20 Jahre ist A mit etwa 3980 € deutlich besser als B mit 3600 €. Je länger die Laufzeit, desto stärker wirkt der Zinseszins.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81$. $W(t) = 3^t$. In jeder Stunde verdreifacht sich die Zahl der Wissenden.
b) $3^6 = 729$, $3^7 = 2187 > 900$. Nach 7 Stunden. Man probiert Dreierpotenzen, bis 900 überschritten ist.
c) Es gibt nur 900 Schüler. Wenn viele das Gerücht kennen, sind kaum noch Personen übrig, denen man es erzählen kann: Das Wachstum bremst ab. Das exponentielle Modell gilt nur am Anfang.
d) $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024 > 900$. Nach 10 Stunden. Bei nur einem Weitererzählen verdoppelt sich die Zahl; es dauert länger.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $0{,}1 \cdot 2^{10} = 102{,}4$ mm; $0{,}1 \cdot 2^{20} \approx 104{,}9$ m; $0{,}1 \cdot 2^{30} \approx 107$ km; $0{,}1 \cdot 2^{42} \approx 439\,805$ km. Jede Faltung verdoppelt die Dicke; man rechnet die Einheiten passend um.
b) 330 m $= 330\,000$ mm. $0{,}1 \cdot 2^n > 330\,000$ gilt für $2^n > 3{,}3 \cdot 10^6$; wegen $2^{21} \approx 2{,}1 \cdot 10^6$ und $2^{22} \approx 4{,}2 \cdot 10^6$ sind 22 Faltungen nötig. Man vergleicht in derselben Einheit Millimeter.

c) $0{,}1 \cdot 2^{42}\,\text{mm} \approx 439\,805$ km $> 384\,400$ km: Ja, der Stapel würde den Mond erreichen. Man vergleicht mit der Entfernung zum Mond.
d) $0{,}1 \cdot 2^7 = 12{,}8$ mm, also etwa 1,3 cm. In Wirklichkeit gelingen kaum mehr als sieben Faltungen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) A: $800 \cdot 1{,}12^4 \approx 1259$; $800 \cdot 1{,}12^8 \approx 1981$; $800 \cdot 1{,}12^{12} \approx 3117$. B: $1200;\ 1600;\ 2000$. A wird jede Woche mit 1,12 multipliziert, B bekommt 100 dazu.
b) $1{,}12^n > 12{,}5$: $1{,}12^{22} \approx 12{,}10$, $1{,}12^{23} \approx 13{,}55$. Nach 23 Wochen. 10000 Follower bedeuten den Faktor 12,5 gegenüber 800.
c) $800 + 100n > 10\,000$: $n > 92$. Nach 93 Wochen ($n = 92$ ergibt genau 10 000). Bei linearem Wachstum löst man eine lineare Ungleichung.
d) Woche 4: A 1259 vs. B 1200; Woche 3: A 1124 vs. 1100; Woche 2: A 1003 vs. 1000; Woche 1: A 896 vs. 900. Ab Woche 2 liegt A vorn. Bei exponentiellem Wachstum wächst der Zuwachs selbst mit. Man vergleicht Woche für Woche.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Quotienten: $\frac{390}{300} = 1{,}3$; $\frac{507}{390} = 1{,}3$; $\frac{659}{507} \approx 1{,}3$. $V(t) = 300 \cdot 1{,}3^t$. Gleiche Quotienten in gleichen Zeitabständen zeigen exponentielles Wachstum.
b) $V(5) = 300 \cdot 1{,}3^5 \approx 1114$ ml. Man setzt $t = 5$ ein.
c) $1{,}3^t = \frac{1000}{300}$: $t = 4{,}59$ h, also nach etwa 4,6 Stunden. Man teilt durch 300 und löst mit dem Logarithmus.
d) $1{,}3^t = 5$: $t = 6{,}13$ h, also nach etwa 6,1 Stunden. Das Modell gilt nur kurz, weil die Hefe irgendwann ihre Nahrung verbraucht hat. Fünffaches Volumen bedeutet $1{,}3^t = 5$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $T = \frac{\ln 2}{\ln(1+p/100)}$: 2 %: $35{,}00$; 3 %: $23{,}45$; 4 %: $17{,}67$; 6 %: $11{,}90$; 8 %: $9{,}01$; 12 %: $6{,}12$ Jahre. Faustregel: $36;\ 24;\ 18;\ 12;\ 9;\ 6$ Jahre. Man berechnet die genaue Verdopplungszeit mit dem Logarithmus und vergleicht mit der Faustregel.
b) Die Abweichung ist bei 8 % am kleinsten (9,01 gegen 9); dort liegt die Faustregel besonders genau, bei kleinen Zinssätzen ist sie etwas zu groß. Man vergleicht die Abweichungen der beiden Spalten.
c) $b^{10} = 2$ liefert $b = 2^{0{,}1} \approx 1{,}0718$, also $p \approx 7{,}18\,\%$. Man zieht die zehnte Wurzel aus 2.
d) Kleine Zinssätze bewirken ein langsames Wachstum, bei etwa halbem Zinssatz ist der Zuwachs pro Jahr halb so groß, also braucht man etwa doppelt so lange, um denselben Faktor zu erreichen. Halber Zinssatz bedeutet also etwa doppelte Verdopplungszeit.