# Lösungen zur Klassenarbeit - Bedingte Wahrscheinlichkeit

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

## Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Man ergänzt zeilen- und spaltenweise über die Summen: Frauen ohne Tennis $48 - 18 = 30$; Männer insgesamt $80 - 48 = 32$; Männer mit Tennis $30 - 18 = 12$; Männer ohne Tennis $32 - 12 = 20$; Spaltensumme ohne Tennis $30 + 20 = 50$ (1 P.).
b) Bedingung „Frau“: Man betrachtet nur die $48$ Frauen, $18$ davon spielen Tennis: $P_F(T) = \frac{18}{48} = 0{,}375$ (1 P.).
c) Bedingung „Tennis“: Grundmenge sind die $30$ Tennisspieler, darunter $18$ Frauen: $P_T(F) = \frac{18}{30} = 0{,}6$ (1 P.).
d) Es gilt $P(F) = \frac{48}{80} = 0{,}6$, und dieser Wert stimmt mit $P_T(F)$ überein. Der Frauenanteil ist unter Tennisspielern genauso groß wie im ganzen Verein, also sind die Merkmale unabhängig (1 P.). Kontrolle: $P(F) \cdot P(T) = 0{,}6 \cdot 0{,}375 = 0{,}225 = \frac{18}{80}$.

## Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Erste Stufe: grün $\frac{4}{10}$, gelb $\frac{6}{10}$. Ohne Zurücklegen sind beim zweiten Zug nur noch $9$ Kugeln da. Nach grün: grün $\frac{3}{9}$, gelb $\frac{6}{9}$; nach gelb: grün $\frac{4}{9}$, gelb $\frac{5}{9}$ (1 P.).
b) Gleiche Farbe ergeben die Pfade grün-grün und gelb-gelb. Pfadregel und Summenregel: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90} \approx 0{,}467$ (2 P.).
c) Gesucht ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit der Bedingung „zweite Kugel gelb“. Diese tritt auf zwei Pfaden ein: $\frac{24}{90} + \frac{30}{90} = \frac{54}{90} = 0{,}6$. Davon gehört der Pfad grün-gelb mit $\frac{24}{90}$ zum Ereignis. Also $P = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$ (1 P.). Antwort: $46{,}7\,\%$ bzw. $44{,}4\,\%$.

## Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Der Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ wird nach dem Schnitt umgestellt: $P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}7 = 0{,}2$ (1 P.).
b) Bedingte Wahrscheinlichkeit heißt Schnitt geteilt durch die Bedingung: $P_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$ und $P_A(B) = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$ (1 P.).
c) Es gilt $P_B(A) = 0{,}4 = P(A)$: Das Wissen, dass $B$ eingetreten ist, ändert die Wahrscheinlichkeit von $A$ nicht. Gleichwertig $P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 = P(A \cap B)$. Die Ereignisse sind unabhängig (1 P.).
d) „Weder $A$ noch $B$“ ist das Gegenereignis von „$A$ oder $B$“ (Regel von De Morgan):

(1 P.). Kontrolle wegen Unabhängigkeit: $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$, passt.

## Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Erste Stufe: defekt $0{,}01$, intakt $0{,}99$. Zweite Stufe nach defekt: beanstandet $0{,}96$, nicht beanstandet $0{,}04$. Nach intakt: beanstandet $0{,}04$ (Fehlalarm), nicht beanstandet

$0{,}96$ (1 P.).
b) Zwei Pfade enden bei „beanstandet“: $0{,}01 \cdot 0{,}96 = 0{,}0096$ und $0{,}99 \cdot 0{,}04 = 0{,}0396$. Summe: $0{,}0492$, also knapp $5\,\%$ (1 P.).
c) Nach dem Satz von Bayes: $P_{\text{beanst.}}(\text{defekt}) = \frac{0{,}0096}{0{,}0492} \approx 0{,}195$ (1 P.).
d) Nur etwa jedes fünfte beanstandete Gerät ist tatsächlich defekt (1 P.). Grund: Defekte sind mit $1\,\%$ sehr selten, während die vielen intakten Geräte trotz der kleinen Fehlalarmquote viele falsche Beanstandungen liefern ($0{,}0396$ gegenüber $0{,}0096$). Ein beanstandetes Gerät sollte daher ein zweites Mal geprüft werden.

## Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Erste Stufe Münze: Kopf $\frac{1}{2}$, Zahl $\frac{1}{2}$. Nach Kopf normaler Würfel: Sechs $\frac{1}{6}$, keine Sechs $\frac{5}{6}$. Nach Zahl präparierter Würfel: Sechs $\frac{1}{2}$, keine Sechs $\frac{1}{2}$ (1 P.).
b) Totale Wahrscheinlichkeit: $P(6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (1 P.).
c) Bedingt auf „gewonnen“: $P_6(\text{Kopf}) = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ (1 P.). Ein Gewinn spricht also eher für den präparierten Würfel.
d) Gewinnt der Spieler, erhält er netto $2{,}50 - 1 = 1{,}50$ €; sonst verliert er $1$ €. Erwartungswert je Spiel: $\frac{1}{3} \cdot 1{,}50 - \frac{2}{3} \cdot 1 = 0{,}50 - 0{,}67 = -\frac{1}{6}$ €. Der Veranstalter nimmt im Mittel $\frac{1}{6}$ € pro Spiel ein, bei $120$ Spielen $120 \cdot \frac{1}{6} = 20$ € (1 P.).