Lernzettel - Bedingte Wahrscheinlichkeit

Klasse: Klasse 10

Oft weißt du schon etwas über den Ausgang eines Zufallsexperiments und willst die Wahrscheinlichkeit mit dieser Zusatzinformation bestimmen. Dafür brauchst du bedingte Wahrscheinlichkeiten, die Vierfeldertafel und das Baumdiagramm.

Einstieg: Was weißt du schon?

In der Klasse 10b sind 28 Schülerinnen und Schüler. 16 von ihnen haben ein Smartphone mit eigenem Datentarif, 12 nicht. Du ziehst zufällig eine Person aus der Klasse. Die Wahrscheinlichkeit für „Datentarif“ beträgt $\frac{16}{28} \approx 0{,}57$. Jetzt sagt dir jemand: „Die gezogene Person ist ein Mädchen.“ Weil unter den 15 Mädchen nur 7 einen Datentarif haben, ändert sich deine Einschätzung auf $\frac{7}{15} \approx 0{,}47$. Genau dieses Umdenken nach einer neuen Information beschreibt die **bedingte Wahrscheinlichkeit**. In diesem Kapitel lernst du, solche Fragen systematisch mit Vierfeldertafel, Baumdiagramm und Formeln zu beantworten.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition: bedingte Wahrscheinlichkeit

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(A \mid B)$ gibt an, wie wahrscheinlich das Ereignis A ist, *wenn* das Ereignis B bereits eingetreten ist. Man liest: „Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B“.

Satz: Formel und Produktregel

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ mit } P(B) > 0$$

Dabei ist $A \cap B$ das Ereignis „A und B treten beide ein“. Umgestellt ergibt sich die **Produktregel** $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$.

Beispiel 1: Würfel

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine gewürfelte Zahl gerade ist, wenn du schon weißt, dass sie größer als 3 ist?

Es kommen nur 4, 5 und 6 infrage. Davon sind 4 und 6 gerade. Also gilt $P(\text{gerade} \mid > 3) = \frac{2}{3}$.

Die Vierfeldertafel

Definition: Vierfeldertafel

Die **Vierfeldertafel** ordnet absolute oder relative Häufigkeiten zweier Merkmale in vier Feldern an, ergänzt um die Summen am Rand.

Beispiel: 100 Schülerinnen und Schüler, davon 60 Mädchen und 40 Jungen. Insgesamt 45 spielen ein Instrument, darunter 30 Mädchen.

	Instrument	kein Instrument	Summe
Mädchen	30	30	60
Jungen	15	25	40
Summe	45	55	100

Beispiel 2: Aus der Tafel ablesen

Berechne $P(\text{Instrument} \mid \text{Mädchen})$ und $P(\text{Mädchen} \mid \text{Instrument})$.

$P(\text{Instrument} \mid \text{Mädchen}) = \frac{30}{60} = 0{,}5.$

$P(\text{Mädchen} \mid \text{Instrument}) = \frac{30}{45} \approx 0{,}667.$

Die beiden Werte sind verschieden, weil sich der Nenner ändert.

Achtung

$P(A \mid B)$ und $P(B \mid A)$ sind im Allgemeinen verschieden. Wer sie verwechselt, macht das bekannte Verwechslungsproblem. Lies genau, worauf sich „unter der Bedingung“ bezieht.

Baumdiagramm und Pfadregeln

Satz: Pfadregeln

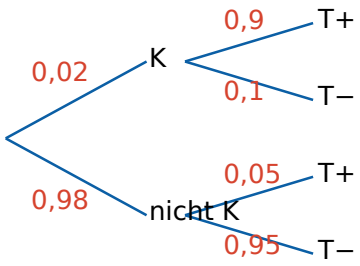
- **Produktregel (1. Pfadregel):** Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.
- **Summenregel (2. Pfadregel):** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

An jedem Knoten ergeben die Wahrscheinlichkeiten der Äste zusammen 1. An die Äste der zweiten Stufe schreibst du die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

So gehst du vor: Baumdiagramm lösen

1. Zeichne die Stufen des Experiments als Äste und beschrifte jeden Ast mit seiner Wahrscheinlichkeit.
2. Prüfe an jedem Knoten, ob die Summe der Äste 1 ergibt.
3. Multipliziere entlang der Pfade (Produktregel).

4. Addiere alle Pfade, die zum gesuchten Ereignis führen (Summenregel).
5. Bei bedingten Fragen teilst du den passenden Pfad durch die Gesamtwahrscheinlichkeit der Bedingung.



2 % der Personen sind erkrankt (K). Der Test fällt bei Kranken zu 90 % positiv aus, bei Gesunden zu 5 %.

Beispiel 3: Medizinischer Test

2 % der Personen sind krank (K). Der Test ist bei Kranken zu 90 % positiv, bei Gesunden zu 5 %. Wie wahrscheinlich ist man krank, wenn der Test positiv ist?

Pfad „krank und positiv“: $0{,}02 \cdot 0{,}9 = 0{,}018$. Pfad „gesund und positiv“: $0{,}98 \cdot 0{,}05 = 0{,}049$.

Insgesamt ist der Test mit $0{,}018 + 0{,}049 = 0{,}067$ positiv.

$P(K \mid T^+) = \dfrac{0{,}018}{0{,}067} \approx 0{,}269$. Nur etwa **27 %** der positiv Getesteten sind wirklich krank, weil die Krankheit selten ist.

Beispiel 4: Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist $P(\text{rot}, \text{rot})$?

$P(\text{rot}, \text{rot}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$. Die zweite Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{7}$ ist bedingt: Nach einer roten Kugel sind nur noch 4 rote unter 7 Kugeln.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten im Alltag

Bedingte Wahrscheinlichkeiten begegnen dir ständig. Die Wahrscheinlichkeit, dass du zu spät kommst, hängt davon ab, ob du mit dem Rad oder mit dem Bus fährst. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Medikament wirkt, ist für Kinder und Erwachsene verschieden. Die Wahrscheinlichkeit für Regen am Sonntag ist größer, wenn es am Samstag geregnet hat. In allen diesen Fällen schränkt eine Information die Menge der möglichen Ergebnisse ein. Du betrachtest nicht mehr alle Ergebnisse, sondern nur noch die, bei denen die Bedingung erfüllt ist. Der Nenner in der Formel $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ist deshalb nicht 1, sondern $P(B)$: Das Ereignis B bildet die neue Gesamtheit.

Beispiel 6: Vierfeldertafel aus Prozentangaben

An einer Schule nutzen 70 % der Schüler Streamingdienste. 40 % der Schüler sind in einem Sportverein. 30 % der Schüler nutzen Streaming und sind im Verein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Vereinsmitglied Streamingdienste nutzt?

Wir legen die Ereignisse fest: S: „nutzt Streaming“, V: „ist im Verein“. Gegeben sind $P(S) = 0{,}7$, $P(V) = 0{,}4$ und $P(S \cap V) = 0{,}3$. Die Vierfeldertafel wird mit diesen drei Werten gefüllt und dann ergänzt: , und . Gesucht ist $P_V(S) = \frac{P(S \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$. Drei Viertel der Vereinsmitglieder nutzen Streaming. Zum Vergleich: Bei allen Schülern sind es nur 70 %. Die Merkmale sind also nicht unabhängig, denn $0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28 \neq 0{,}3$.

Beispiel 7: Zwei Maschinen, ein Ausschussteil

Maschine A stellt 60 % der Schrauben her, Maschine B den Rest. 2 % der Schrauben von A und 5 % der Schrauben von B sind fehlerhaft. Eine zufällig gezogene Schraube ist fehlerhaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt sie von Maschine B?

Zuerst zeichnest du das Baumdiagramm: Erste Stufe Maschine (A mit 0,6; B mit 0,4), zweite Stufe fehlerhaft (F) oder in Ordnung. Die Pfade zu „fehlerhaft“ haben die Wahrscheinlichkeiten $0{,}6 \cdot 0{,}02 = 0{,}012$ und $0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}020$. Nach der Pfadsummenregel ist $P(F) = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$. Jetzt wird die Bedingung umgekehrt: $P_F(B) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}020}{0{,}032} = 0{,}625$. Obwohl Maschine B nur 40 % der Schrauben produziert, stammen 62,5 % der fehlerhaften Schrauben von ihr.

Typische Fehler vermeiden

Achtung: $P_B(A)$ und $P_A(B)$ sind verschieden

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen Fußball spielt, ist nicht dasselbe wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fußballspielerin ein Mädchen ist. Im ersten Fall ist die Gesamtheit „alle Mädchen“, im zweiten „alle Fußballspieler“. Die Formeln haben denselben Zähler $P(A \cap B)$, aber unterschiedliche Nenner. Dieser Denkfehler führt in den Medien oft zu falschen Schlagzeilen. Frage dich deshalb immer: Welches Ereignis steht hinter dem senkrechten Strich? Dieses Ereignis ist die neue Grundgesamtheit.

Achtung: Unabhängig heißt nicht „sich ausschließend“

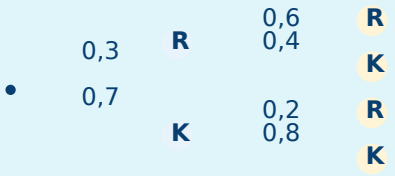
Zwei Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, die sich ausschließen ($A \cap B = \emptyset$), sind sogar besonders stark abhängig: Wenn A eintritt, ist B unmöglich, also $P_A(B) = 0 \neq P(B)$. Unabhängigkeit bedeutet dagegen, dass die Information „A ist eingetreten“ die Wahrscheinlichkeit von B überhaupt nicht verändert.

So gehst du vor: Textaufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit

1. Lies den Text und benenne die Ereignisse mit Buchstaben (zum Beispiel A: „allergisch“, T: „Test positiv“).
2. Schreibe alle gegebenen Angaben als Wahrscheinlichkeiten auf und prüfe, ob es sich um $P(A)$, $P_A(B)$ oder $P(A \cap B)$ handelt.
3. Wähle das Hilfsmittel: Vierfeldertafel bei zwei Merkmalen mit absoluten Zahlen, Baumdiagramm bei Stufen oder bei bekannten Bedingungen.
4. Berechne die gesuchte Größe und beschreibe die Gesamtheit, auf die sie sich bezieht.
5. Kontrolliere: Summen in der Tafel stimmen, die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen eines Knotens ergeben 1.

Beispiel 8: Regen am Wochenende

Am Samstag regnet es mit 30 %. Hat es am Samstag geregnet, regnet es am Sonntag mit 60 %, sonst nur mit 20 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit regnet es am Sonntag?



Beide Pfade, die zu „Regen am Sonntag“ führen, werden addiert: $P(R_{So}) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$. Mit 32 % ist Regen am Sonntag etwas wahrscheinlicher als am Samstag. Wichtig: Die 0,6 und die 0,2 sind bedingte Wahrscheinlichkeiten, Samstag und Sonntag sind also nicht unabhängig.

Vierfeldertafel oder Baumdiagramm?

Beide Hilfsmittel enthalten dieselbe Information, nur anders geordnet. Die Vierfeldertafel ist ideal, wenn du absolute Häufigkeiten oder die Wahrscheinlichkeiten von Schnittmengen kennst. Du liest dort bedingte Wahrscheinlichkeiten durch Quotienten ab. Das Baumdiagramm eignet sich besser, wenn ein Vorgang in Stufen abläuft oder wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, wie bei Tests, Wetterlagen und Produktionsfehlern. Aus einem Baum erhältst du durch Multiplizieren der Pfade die Schnittwahrscheinlichkeiten und kannst damit eine Vierfeldertafel füllen. Besonders hilfreich ist ein Trick: Stelle dir statt Wahrscheinlichkeiten eine Gesamtheit von 1000 Personen vor. Bei einer Krankheit mit 1 % Häufigkeit sind das 10 Kranke und 990 Gesunde. Mit solchen natürlichen Häufigkeiten wird das scheinbare Paradox der Tests sofort sichtbar.

Wusstest du? Thomas Bayes und der Spamfilter

Der englische Pfarrer Thomas Bayes (1701 bis 1761) fand die Regel, mit der man eine Bedingung umkehrt. Sie wurde erst nach seinem Tod veröffentlicht. Heute arbeitet sie in jedem E-Mail-Programm: Ein Spamfilter schätzt, wie wahrscheinlich eine Nachricht Spam ist, wenn bestimmte Wörter darin vorkommen. Auch Ärztinnen, Wettervorhersagen und Navigationssysteme nutzen diese Denkweise, um Vermutungen mit neuen Daten zu verbessern.

Beispiel 9: Unabhängigkeit mit Zahlen prüfen

Von 200 befragten Schülern spielen 80 ein Instrument, 120 nicht. Unter den 80 Musikern sind 48 Mädchen. Insgesamt sind 100 Mädchen befragt worden. Sind „Mädchen“ und „spielt Instrument“ unabhängig?

Es ist $P(M) = \frac{100}{200} = 0{,}5$ und $P(I) = \frac{80}{200} = 0{,}4$. Die Schnittmenge hat $P(M \cap I) = \frac{48}{200} = 0{,}24$. Das Produkt $P(M) \cdot P(I) = 0{,}2$ ist verschieden von $0{,}24$. Also sind die Merkmale abhängig. Gleichwertig: $P_M(I) = \frac{48}{100} = 0{,}48$ ist größer als $P(I) = 0{,}4$. Unter den Mädchen ist der Anteil der Musikerinnen größer als in der Gesamtgruppe.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ gibt an, wie wahrscheinlich A ist, wenn B schon eingetreten ist ($P(B) > 0$).
- Die Gesamtheit ist nach der Bedingung nur noch B: Der Nenner ist $P(B)$ und nicht 1.
- Produktregel: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$; im Baumdiagramm multiplizierst du längs eines Pfades.
- Pfadsummenregel: Führen mehrere Pfade zum gesuchten Ereignis, addierst du ihre Wahrscheinlichkeiten (totale Wahrscheinlichkeit).
- Vierfeldertafel: Ordne zwei Merkmale in Zeilen und Spalten an, fülle sie aus den Randsummen und lies Quotienten ab.
- Unabhängig sind A und B, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt, gleichwertig $P_B(A) = P(A)$.
- $P_B(A) \neq P_A(B)$: Kehre die Bedingung mit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ um (Satz von Bayes).
- Bei Tests mit seltenen Ereignissen sind natürliche Häufigkeiten (zum Beispiel 1000 Personen) die beste Kontrolle.

Achtung

Beim Ziehen ohne Zurücklegen musst du die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe anpassen. Addiere Pfade nicht, die du multiplizieren musst, und umgekehrt. Prüfe an jedem Knoten, ob die Summe 1 ist.

Stochastische Unabhängigkeit

Definition: unabhängig

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn das Eintreten von B die Wahrscheinlichkeit von A nicht ändert, also $P(A \mid B) = P(A)$.

Satz: Unabhängigkeit

$$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beispiel 5: Unabhängigkeit prüfen

Beim Würfeln sei A „gerade“, B „durch 3 teilbar“ und C „größer als 3“. Prüfe die Unabhängigkeit von A, B und von A, C.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $A \cap B = \{6\}$ mit $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Wegen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ sind A und B **unabhängig**.

Für A und C: $A \cap C = \{4, 6\}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Sie sind **abhängig**.

Hinweis

Beim Ziehen *mit* Zurücklegen und beim Münzwurf sind die Stufen unabhängig. Nach fünfmal Kopf ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf beim sechsten Wurf weiterhin $0{,}5$. Unvereinbare Ereignisse ($A \cap B = \emptyset$) sind fast nie unabhängig.

Die Bedingung umkehren

Satz: Umkehren der Bedingung (Bayes)

Kennst du $P(B \mid A)$ und suchst $P(A \mid B)$, bestimmst du zuerst mit der Summenregel $P(B)$ aus allen Pfaden zu B. Dann teilst du die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Pfades durch $P(B)$. Diese Umkehrung heißt Satz von Bayes. Im Baumdiagramm kannst du sie wie in Beispiel 3 ohne Formel ausführen.

Ottos Tipp

Rechne bei Bayes-Aufgaben mit absoluten Zahlen. Stelle dir 10 000 Personen vor und fülle die Vierfeldertafel aus. Dann liest du die bedingte Wahrscheinlichkeit einfach als Anteil ab: Treffer geteilt durch alle, auf die die Bedingung zutrifft.