Arbeitsblatt - Bedingte Wahrscheinlichkeit

Klasse: Klasse 10 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Die Klassenumfrage

In einer Jahrgangsstufe mit 100 Schülern wurde nach dem Hobby „Musikinstrument“ gefragt. Von den 100 Schülern sind 60 Mädchen, 45 spielen ein Instrument, und 30 der Mädchen spielen ein Instrument.

	Instrument	kein Instrument	Summe
Mädchen	30	?	60
Jungen	?	?	?
Summe	45	?	100

a) Ergänze die Vierfeldertafel.
b) Berechne $P_{\text{Mädchen}}(\text{Instrument})$.
c) Berechne $P_{\text{Instrument}}(\text{Mädchen})$.
d) Erkläre, warum die beiden Wahrscheinlichkeiten verschieden sind.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Mit der Formel rechnen

Für drei Paare von Ereignissen sind die Wahrscheinlichkeiten bekannt. Berechne jeweils $P_B(A)$, $P_A(B)$ und entscheide, ob A und B unabhängig sind.

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$
Fall 1	0,5	0,4	0,2
Fall 2	0,6	0,5	0,45
Fall 3	0,3	0,8	$P(A \cup B) = 0{,}86$

a) Fall 1
b) Fall 2
c) Fall 3

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Zwei Kugeln ziehen

Eine Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Du ziehst nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen.

a) Zeichne ein Baumdiagramm und beschrifte alle Pfade.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für zwei rote Kugeln.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln.
d) Die erste Kugel ist blau. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die zweite Kugel rot ist?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Würfel mit Zusatzinformation

Ein fairer Würfel wird einmal geworfen. Die Information, die du erhältst, verändert die Grundmenge. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten.

a) Die Augenzahl ist gerade. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine 6?
b) Die Augenzahl ist größer als 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie gerade ist?
c) Die Augenzahl ist ungerade. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Primzahl?
d) Die Augenzahl ist gerade. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl größer als 4?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Das Skatblatt

Ein Skatblatt hat 32 Karten: vier Farben (Kreuz, Pik, Herz, Karo) mit je acht Karten (7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass). Eine Karte wird gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ass, wenn bekannt ist, dass die Karte ein Herz ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Herz, wenn bekannt ist, dass die Karte eine Bildkarte (Bube, Dame, König) ist?
c) Sind „Ass“ und „Herz“ unabhängig? Begründe mit Zahlen.
d) Es werden zwei Karten ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Karten Asse sind?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Dreimal Münzwurf

Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Es gibt acht gleich wahrscheinliche Ergebnisse (W für Wappen, Z für Zahl).

a) Schreibe alle acht Ergebnisse auf.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens zweimal Wappen?
c) Der erste Wurf zeigt Wappen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens zweimal Wappen?
d) Es fiel mindestens einmal Wappen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau einmal Wappen?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Handynutzung in der Schule

Bei einer Umfrage unter 150 Schülern wurde gefragt, ob sie das Handy täglich mehr als 3 Stunden nutzen. 96 Schüler bejahten. Von den 70 befragten Jungen nutzen 49 das Handy mehr als 3 Stunden, es wurden 80 Mädchen befragt.

	Handy mehr als 3 h	Handy höchstens 3 h	Summe
Jungen	49	?	70
Mädchen	?	?	80
Summe	96	?	150

a) Ergänze die Vierfeldertafel.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Junge das Handy mehr als 3 Stunden nutzt? Wie groß ist sie für ein Mädchen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Vielnutzer ein Junge ist?
d) Prüfe, ob Geschlecht und Vielnutzung unabhängig sind, und formuliere das Ergebnis in einem Satz.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Elfmeter

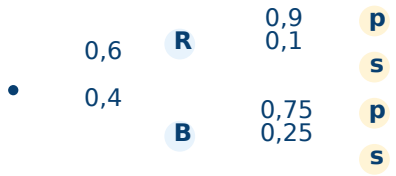
Eine Spielerin schießt zwei Elfmeter nacheinander. Den ersten verwandelt sie mit der Wahrscheinlichkeit 0,75. Nach einem Treffer verwandelt sie den zweiten mit 0,85, nach einem Fehlschuss nur mit 0,6.

a) Zeichne das Baumdiagramm und berechne alle vier Pfadwahrscheinlichkeiten.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Schuss ein Treffer ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer?
d) Der zweite Schuss war ein Treffer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war schon der erste ein Treffer?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Pünktlich zur Schule

Maxi fährt an 60 % der Schultage mit dem Rad, sonst mit dem Bus. Mit dem Rad ist er in 90 % der Fälle pünktlich, mit dem Bus in 75 %.



a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maxi pünktlich ist?
b) Maxi kommt zu spät. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er mit dem Bus gefahren?

c) Wie viele Verspätungen sind in 200 Schultagen zu erwarten, und wie viele davon entfallen auf den Bus?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Der Allergietest

15 % der Schüler einer Schule sind gegen Pollen allergisch. Ein Schnelltest zeigt bei Allergikern in 95 % der Fälle „positiv“, bei Nicht-Allergikern fälschlich in 8 % der Fälle.



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis.
b) Ein Schüler hat ein positives Ergebnis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er wirklich allergisch ist?
c) Ein Schüler hat ein negatives Ergebnis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er trotzdem allergisch ist?
d) Löse Teilaufgabe b) noch einmal mit natürlichen Häufigkeiten für 1000 Schüler.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Qualitätskontrolle

In einem Werk laufen Schrauben von zwei Maschinen. Maschine A liefert 60 % der Produktion mit 2 % Ausschuss, Maschine B liefert 40 % mit 5 % Ausschuss. Täglich werden 5000 Schrauben hergestellt.

a) Wie groß ist der Ausschussanteil der gesamten Produktion?
b) Eine fehlerhafte Schraube wird gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie von Maschine B?
c) Wie viele fehlerhafte Schrauben fallen täglich an, wie viele davon von jeder Maschine?
d) Die Firma will den Ausschuss verringern und kann nur eine Maschine verbessern: Die Fehlerquote soll bei einer Maschine halbiert werden. Welche sollte sie wählen? Begründe.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Mensaumfrage

In der Mensa wurden 240 Schüler befragt, ob sie das vegetarische Gericht wählen. 130 der Befragten sind Mädchen. Insgesamt wählen 90 Schüler vegetarisch, darunter 63 Mädchen.

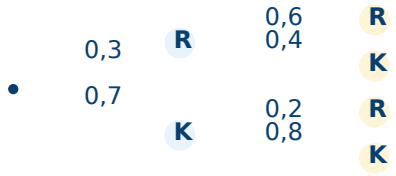
	vegetarisch	nicht vegetarisch	Summe
Mädchen	63	?	130
Jungen	27	?	?
Summe	90	?	240

a) Ergänze die Tafel.
b) Wie hoch ist der Anteil der Vegetarier unter den Mädchen, wie hoch unter den Jungen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Vegetarier ein Mädchen ist?
d) Sind Geschlecht und Gerichtwahl unabhängig? Begründe.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Das Wochenendwetter

Am Samstag regnet es mit 30 %. Nach einem verregneten Samstag regnet es am Sonntag mit 60 %, nach einem trockenen Samstag mit 20 %. Die Klasse plant einen Ausflug.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit regnet es an beiden Tagen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit regnet es am Sonntag?
c) Der Sonntag war verregnet. Wie wahrscheinlich war schon der Samstag nass?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt das ganze Wochenende trocken?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Das zweistufige Glücksrad

Beim Schulfest wird ein Glücksrad gedreht: Es zeigt rot mit $\frac{1}{2}$, blau mit $\frac{1}{4}$ und gelb mit $\frac{1}{4}$. Danach folgt ein zweites Rad. Nach „rot“ dreht man das Rad X (grün $\frac{1}{3}$, weiß $\frac{2}{3}$), nach blau oder gelb das Rad Y (grün $\frac{3}{4}$, weiß $\frac{1}{4}$).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für grün auf dem zweiten Rad?
b) Es erscheint grün. Wie wahrscheinlich war rot auf dem ersten Rad?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für gelb und weiß?
d) Begründe, dass „rot“ und „grün“ nicht unabhängig sind.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Tombola

Beim Schulfest enthält die Tombola 20 Lose. Genau 4 Lose gewinnen, 16 sind Nieten.

Anna zieht drei Lose nacheinander ohne Zurücklegen.

Lose	Anzahl
Gewinn	4
Niete	16
Summe	20

Jede Ziehung verändert die Zusammensetzung der Lose in der Trommel. Auf der ersten Stufe ist die Wahrscheinlichkeit für eine Niete $\frac{16}{20}$, auf der zweiten Stufe hängt sie vom Ergebnis der ersten ab. Verwende ein Baumdiagramm mit drei Stufen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für drei Nieten?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau einen Gewinn?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Gewinn?
d) Es ist bekannt, dass Anna mindestens einmal gewonnen hat. Wie wahrscheinlich war das erste Los eine Niete?
e) Ein Los kostet 1 €. Ist es sinnvoll, mit dem Ziel „mindestens ein Gewinn“ drei Lose zu kaufen? Argumentiere mit den Zahlen.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Der Schnelltest

Eine Krankheit tritt bei 2 % der Bevölkerung auf. Ein Schnelltest erkennt Kranke zu 90 % (positiv) und Gesunde zu 95 % (negativ). In einer Stadt werden 10 000 Personen getestet.

	krank	gesund	Summe
Test positiv	?	?	?
Test negativ	?	?	?
Summe	200	9 800	10 000

a) Fülle die Tafel mit natürlichen Häufigkeiten.
b) Eine Person ist positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie krank ist?
c) Eine Person ist negativ getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie trotzdem krank ist?
d) Dieselbe Rechnung für eine Region, in der 20 % krank sind. Was lernst du über die Aussagekraft eines positiven Tests?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Der Spamfilter

Von allen eingehenden E-Mails eines Schülers sind 30 % Spam. Der Filter markiert 98 % der Spam-Mails als Spam, aber auch 3 % der normalen Mails. Pro Tag kommen im Schnitt 500 Mails an.

a) Zeichne das Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mail als Spam markiert wird?

c) Eine Mail ist als Spam markiert. Wie wahrscheinlich ist sie tatsächlich Spam?
d) Eine Mail liegt ungefiltert im Posteingang. Wie wahrscheinlich ist sie trotzdem Spam?
e) Wie viele Mails werden täglich markiert, und wie viele davon sind zu Unrecht markiert?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Verein und Noten

Bei einer Befragung von 200 Schülern wurde erfasst, ob sie im Sportverein sind und ob ihre letzte Mathenote gut (1 oder 2) war. Zusätzlich wurde bei einer zweiten Befragung die tägliche Zeit am Computer erhoben.

	gute Note	schlechtere Note	Summe
im Verein	66	54	120
nicht im Verein	44	36	80
Summe	110	90	200

	gute Note	schlechtere Note	Summe
mehr als 2 h am PC	30	50	80
höchstens 2 h am PC	90	30	120
Summe	120	80	200

a) Prüfe in der ersten Tafel, ob „im Verein“ und „gute Note“ unabhängig sind.
b) Prüfe in der zweiten Tafel, ob „mehr als 2 Stunden am PC“ und „gute Note“ unabhängig sind.
c) Formuliere das Ergebnis der zweiten Tafel in einem Satz mit bedingten Wahrscheinlichkeiten.
d) Darf man aus der zweiten Tafel schließen, dass viel Computerzeit schlechte Noten verursacht? Begründe.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Die Klassenfahrt

90 Schüler eines Jahrgangs haben ihr Fahrtziel gewählt: Berlin, London oder Wien. Die Tafel zeigt die Ergebnisse nach Geschlecht.

	Berlin	London	Wien	Summe
Mädchen	18	20	12	50
Jungen	18	10	12	40
Summe	36	30	24	90

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen nach London fährt?
b) Eine Person, die nach London fährt, wird ausgelost. Wie wahrscheinlich ist sie ein Mädchen?
c) Wie wahrscheinlich ist ein Junge, wenn die ausgeloste Person nach Wien fährt?

d) Sind „Mädchen“ und „Berlin“ unabhängig? Rechne nach.
e) Gib für ein Baumdiagramm mit „Geschlecht“ auf der ersten und „Ziel“ auf der zweiten Stufe die Pfadwahrscheinlichkeiten an.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Das Ziegenproblem

In einer Spielshow stehen drei Türen. Hinter einer Tür steht ein Auto, hinter den beiden anderen eine Ziege. Du wählst Tür 1. Der Moderator, der weiß, wo das Auto steht, öffnet eine der beiden anderen Türen mit einer Ziege (hat er zwei Möglichkeiten, wählt er zufällig). Dann darfst du bei Tür 1 bleiben oder zur anderen verschlossenen Tür wechseln.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht das Auto hinter Tür 1? Wie groß ist die Gewinnchance, wenn du immer bleibst?
b) Der Moderator öffnet Tür 3. Beschreibe den Baum und berechne $P(\text{Moderator öffnet Tür } 3)$.
c) Berechne $P_{\text{Tür 3 offen}}(\text{Auto hinter Tür } 2)$. Lohnt sich das Wechseln?
d) Zwei Schüler spielen das Spiel 300-mal, einer bleibt immer, der andere wechselt immer. Wie viele Gewinne sind jeweils zu erwarten?