Lösungen - Bedingte Wahrscheinlichkeit

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) Jungen mit Instrument: $45 - 30 = 15$; Mädchen ohne: $60 - 30 = 30$; Jungen insgesamt $100 - 60 = 40$; Jungen ohne: $40 - 15 = 25$; ohne Instrument insgesamt 55. Man füllt die Tafel so, dass jede Zeilen- und Spaltensumme stimmt.
b) $P = \frac{30}{60} = 0{,}5$. Bedingung „Mädchen“: Man betrachtet nur die 60 Mädchen; 30 davon spielen ein Instrument.
c) $P = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Bedingung „Instrument“: Man betrachtet nur die 45 Instrumentalisten; 30 davon sind Mädchen.
d) Die Gesamtheit ist verschieden: Im ersten Fall sind es die 60 Mädchen, im zweiten die 45 Instrumentalisten. Der Zähler (30) ist gleich, der Nenner nicht. Deshalb muss man bei bedingten Wahrscheinlichkeiten immer genau angeben, worauf sich die Bedingung bezieht.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $P_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$; $P_A(B) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$. Da $0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$, sind die Ereignisse unabhängig. Man teilt die Schnittwahrscheinlichkeit jeweils durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung. Unabhängig bedeutet: Die Bedingung ändert die Wahrscheinlichkeit nicht, hier $P_B(A) = P(A) = 0{,}5$.
b) $P_B(A) = \frac{0{,}45}{0{,}5} = 0{,}9$; $P_A(B) = \frac{0{,}45}{0{,}6} = 0{,}75$. Es ist $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}30 \neq 0{,}45$: abhängig. Hier ist $P_B(A) = 0{,}9$ viel größer als $P(A) = 0{,}6$: Das Eintreten von B macht A wahrscheinlicher.
c) Zuerst $P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}8 - 0{,}86 = 0{,}24$. Dann $P_A(B) = \frac{0{,}24}{0{,}3} = 0{,}8$ und $P_B(A) = \frac{0{,}24}{0{,}8} = 0{,}3$. Wegen $0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$ unabhängig. Den Schnitt erhält man aus dem Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Erste Stufe: rot $\frac{5}{8}$, blau $\frac{3}{8}$. Zweite Stufe nach rot: rot $\frac{4}{7}$, blau $\frac{3}{7}$; nach blau: rot $\frac{5}{7}$, blau $\frac{2}{7}$. Ohne Zurücklegen ändern sich die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe; die Nenner sind dort 7.
b) $P(rr) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$. Erste Pfadregel: entlang des Pfades multiplizieren und kürzen.
c) $P(rb) + P(br) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$. Zwei Pfade mit verschiedenen Farben; zweite Pfadregel: addieren.
d) Nach einer blauen Kugel liegen 5 rote und 2 blaue in der Urne: $P = \frac{5}{7} \approx 0{,}714$. Die Wahrscheinlichkeit auf der zweiten Stufe ist genau die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_b(r)$.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Zusatzinformation verkleinert die Grundmenge. Man zählt nur noch die Ergebnisse, die zur Information passen, und teilt die günstigen durch diese.
a) Grundmenge $\{2;4;6\}$, günstig $\{6\}$: $\frac{1}{3}$. Ohne Information wäre die Wahrscheinlichkeit nur $\frac{1}{6}$.
b) Grundmenge $\{4;5;6\}$, günstig $\{4;6\}$: $\frac{2}{3}$. „Größer als 3“ bedeutet 4, 5 oder 6; gerade davon sind 4 und 6.
c) Grundmenge $\{1;3;5\}$, Primzahlen $\{3;5\}$: $\frac{2}{3}$. Die 1 ist keine Primzahl.
d) Grundmenge $\{2;4;6\}$, günstig $\{6\}$: $\frac{1}{3}$. Die Information verdoppelt die Chance auf eine 6.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $P = \frac{1}{8} = 0{,}125$ (ein Ass unter acht Herzkarten). Die Bedingung „Herz“ verkleinert die Grundmenge auf 8 Karten.
b) 12 Bildkarten, davon 3 Herz: $P = \frac{3}{12} = 0{,}25$. Bildkarten sind Bube, Dame und König jeder Farbe, also 12 Karten.
c) $P(\text{Ass}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P_{Herz}(\text{Ass}) = \frac{1}{8}$: gleich, also unabhängig. Auch $P(\text{Ass} \cap \text{Herz}) = \frac{1}{32} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$. Die Information „Herz“ ändert die Wahrscheinlichkeit für ein Ass nicht, deshalb sind die Ereignisse unabhängig.
d) $P = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{12}{992} \approx 0{,}0121$. Ohne Zurücklegen: Nach dem ersten Ass sind noch 3 Asse unter 31 Karten.

Lösung zu Aufgabe 6

a) WWW, WWZ, WZW, WZZ, ZWW, ZWZ, ZZW, ZZZ. Bei drei Würfen mit je zwei Möglichkeiten gibt es $2^3 = 8$ Ergebnisse.
b) Günstig: WWW, WWZ, WZW, ZWW. $P = \frac{4}{8} = 0{,}5$. Mindestens zweimal Wappen bedeutet zwei oder drei Wappen.
c) Grundmenge: WWW, WWZ, WZW, WZZ. Günstig sind die ersten drei: $P = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Die Bedingung „erster Wurf Wappen“ lässt nur vier Ergebnisse übrig.
d) Mindestens einmal Wappen: 7 Ergebnisse. Genau einmal: WZZ, ZWZ, ZZW (3 Ergebnisse). $P = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$. Die Bedingung „mindestens einmal Wappen“ schließt nur ZZZ aus.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Jungen höchstens 3 h: $70 - 49 = 21$; Mädchen mehr als 3 h: $96 - 49 = 47$; Mädchen höchstens 3 h: $80 - 47 = 33$; höchstens 3 h insgesamt: 54. Man ergänzt die Vierfeldertafel über die Zeilen- und Spaltensummen.
b) Jungen: $\frac{49}{70} = 0{,}70$; Mädchen: $\frac{47}{80} \approx 0{,}588$. Man teilt jeweils durch die Anzahl der Jungen bzw. Mädchen.
c) $\frac{49}{96} \approx 0{,}510$. Hier ist die Bedingung „mehr als 3 h“; man teilt durch 96.
d) $P(V) = \frac{96}{150} = 0{,}64$; $P_J(V) = 0{,}70$. Da $0{,}70 \neq 0{,}64$, sind die Merkmale nicht

unabhängig, der Unterschied ist aber klein: Jungen nutzen das Handy etwas häufiger lang. Bei Unabhängigkeit müsste der Anteil in jeder Gruppe gleich dem Gesamtanteil sein.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $P(TT) = 0{,}75 \cdot 0{,}85 = 0{,}6375$; $P(TF) = 0{,}75 \cdot 0{,}15 = 0{,}1125$; $P(FT) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15$; $P(FF) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}10$. Probe: Summe $= 1$. Erste Pfadregel: multiplizieren; die Summe aller Pfade muss 1 ergeben.
b) $P = 0{,}6375 + 0{,}15 = 0{,}7875$. Der zweite Elfmeter ist ein Treffer auf den Pfaden TT und FT.
c) $P = 0{,}1125 + 0{,}15 = 0{,}2625$. Genau ein Treffer: Pfade TF und FT.
d) $P_{T_2}(T_1) = \frac{0{,}6375}{0{,}7875} \approx 0{,}810$. Man teilt die Wahrscheinlichkeit von TT durch die Wahrscheinlichkeit „zweiter Treffer“.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $P = 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}75 = 0{,}54 + 0{,}30 = 0{,}84$. Zwei Pfade führen zu „pünktlich“: mit dem Rad und mit dem Bus.
b) $P(\text{spät}) = 0{,}06 + 0{,}10 = 0{,}16$; $P_{\text{spät}}(\text{Bus}) = \frac{0{,}10}{0{,}16} = 0{,}625$. Man teilt die Wahrscheinlichkeit „Bus und spät“ durch die Wahrscheinlichkeit „spät“. Antwort: Bei einer Verspätung ist er zu 62,5 % mit dem Bus gefahren.
c) Verspätungen: $0{,}16 \cdot 200 = 32$; davon Bus: $0{,}10 \cdot 200 = 20$ (das sind $62{,}5\,\%$). Mit absoluten Zahlen lässt sich das Ergebnis aus b) leicht überprüfen.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $P(+) = 0{,}15 \cdot 0{,}95 + 0{,}85 \cdot 0{,}08 = 0{,}1425 + 0{,}068 = 0{,}2105$. Zwei Pfade führen zu einem positiven Test: Allergiker und Nicht-Allergiker.
b) $P_+(A) = \frac{0{,}1425}{0{,}2105} \approx 0{,}677$, also etwa 68 %. Man teilt die Wahrscheinlichkeit „allergisch und positiv“ durch die Wahrscheinlichkeit „positiv“.
c) $P(-) = 1 - 0{,}2105 = 0{,}7895$; $P_-(A) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}05}{0{,}7895} = \frac{0{,}0075}{0{,}7895} \approx 0{,}0095$, also unter 1 %. Ein negatives Ergebnis ist also sehr zuverlässig.
d) 150 Allergiker, davon $142{,}5$ positiv; 850 Nicht-Allergiker, davon 68 positiv. $\frac{142{,}5}{142{,}5+68} \approx 0{,}677$. Mit 1000 Schülern gerechnet erhält man dasselbe Ergebnis wie in b).

Lösung zu Aufgabe 11

a) $P = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$, also 3,2 %. Zwei Pfade führen zu einer fehlerhaften Schraube.
b) $P_F(B) = \frac{0{,}020}{0{,}032} = 0{,}625$. Man teilt den Pfad „B und fehlerhaft“ durch die Gesamtwahrscheinlichkeit für Ausschuss.
c) Gesamt $0{,}032 \cdot 5000 = 160$; A: $0{,}012 \cdot 5000 = 60$; B: $0{,}020 \cdot 5000 = 100$. Man multipliziert die Wahrscheinlichkeiten mit 5000.
d) Maschine B: Sie verursacht 62,5 % des Ausschusses. Halbiert man ihre Fehlerquote

auf 2,5 %, sinkt der Gesamtausschuss um 0,010 auf 2,2 %; bei Maschine A nur um 0,006 auf 2,6 %. Es lohnt sich also, zuerst Maschine B zu verbessern.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Mädchen nicht vegetarisch: $130 - 63 = 67$; Jungen insgesamt: $240 - 130 = 110$; Jungen nicht vegetarisch: $110 - 27 = 83$; nicht vegetarisch insgesamt: 150. Man ergänzt die Tafel über die Summen.
b) Mädchen: $\frac{63}{130} \approx 0{,}485$; Jungen: $\frac{27}{110} \approx 0{,}245$. Man teilt durch die Anzahl der Mädchen bzw. Jungen.
c) $\frac{63}{90} = 0{,}70$. Hier ist die Bedingung „vegetarisch“; man teilt durch 90.
d) $P(V) = \frac{90}{240} = 0{,}375$, aber $P_M(V) \approx 0{,}485$: nicht unabhängig. Mädchen wählen deutlich häufiger vegetarisch. Bei Unabhängigkeit wäre der Anteil in beiden Gruppen gleich.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $P = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$. Pfad „Regen, Regen“: multiplizieren.
b) $P = 0{,}18 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$. Regen am Sonntag tritt auf zwei Pfaden auf.
c) $\frac{0{,}18}{0{,}32} = 0{,}5625$, also etwa 56 %. Man teilt den Pfad „Regen, Regen“ durch die Wahrscheinlichkeit für Regen am Sonntag.
d) $P = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$. Beide Tage trocken: Pfad „trocken, trocken“.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24} \approx 0{,}542$. Grün kann nach Rot oder nach einem der anderen Ergebnisse kommen; man addiert die Pfade.
b) $P = \frac{1/6}{13/24} = \frac{4}{13} \approx 0{,}308$. Man teilt den Pfad „rot, grün“ durch die Gesamtwahrscheinlichkeit für Grün.
c) $P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$. Man multipliziert entlang des Pfades.
d) $P(\text{grün}) = \frac{13}{24} \approx 0{,}54$, aber $P_{rot}(\text{grün}) = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$. Die Werte stimmen nicht überein. Deshalb sind die Ereignisse „rot“ und „grün“ abhängig.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $P = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{3360}{6840} \approx 0{,}4912$. Drei Nieten nacheinander ohne Zurücklegen: Zähler und Nenner werden jeweils um 1 kleiner.
b) Drei gleich wahrscheinliche Pfade (GNN, NGN, NNG), je $\frac{4 \cdot 16 \cdot 15}{20 \cdot 19 \cdot 18}$. $P = 3 \cdot \frac{960}{6840} \approx 0{,}4211$. Der Gewinn kann im ersten, zweiten oder dritten Zug kommen; alle drei Pfade haben dieselbe Wahrscheinlichkeit.
c) $P = 1 - 0{,}4912 \approx 0{,}5088$. „Mindestens ein Gewinn“ ist das Gegenereignis von „drei Nieten“.
d) $P(\text{erstes Los Niete und mind. ein Gewinn}) = 0{,}8 - 0{,}4912 = 0{,}3088$;
$P = \frac{0{,}3088}{0{,}5088} \approx 0{,}607$. Man teilt die Schnittwahrscheinlichkeit durch die

Wahrscheinlichkeit der Bedingung „mindestens ein Gewinn“.
e) Mit etwa 51 % gewinnt man mindestens einmal. Das sagt nichts über den Wert des Gewinns: Ob sich der Einsatz lohnt, hängt vom Wert der Preise ab. Die Chance auf einen Gewinn ist gut, aber nicht sicher.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Kranke: 200, davon positiv $0{,}9 \cdot 200 = 180$, negativ 20. Gesunde: 9800, davon falsch positiv $0{,}05 \cdot 9800 = 490$, negativ 9310. Positiv gesamt 670, negativ 9330. Man rechnet mit 10000 Personen: 2 % sind 200 Kranke.
b) $\frac{180}{670} \approx 0{,}269$; nur etwa 27 %. Man betrachtet nur die 670 positiv Getesteten.
c) $\frac{20}{9330} \approx 0{,}0021$, also etwa 0,2 %. Man betrachtet nur die negativ Getesteten.
d) Bei 20 %: 2000 Kranke, 1800 positiv; 8000 Gesunde, 400 falsch positiv. $\frac{1800}{2200} \approx 0{,}818$. Bei seltener Krankheit sind viele positive Ergebnisse falsch positiv: Der Anteil der Kranken in der Bevölkerung ist entscheidend. Ein positives Ergebnis muss daher bei seltenen Krankheiten immer überprüft werden.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Spam $0{,}3$: markiert $0{,}98$, nicht markiert $0{,}02$. Kein Spam $0{,}7$: markiert $0{,}03$, nicht markiert $0{,}97$. Auf der ersten Stufe steht die Art der Mail, auf der zweiten die Entscheidung des Filters.
b) $P = 0{,}3 \cdot 0{,}98 + 0{,}7 \cdot 0{,}03 = 0{,}294 + 0{,}021 = 0{,}315$. Zwei Pfade führen zu „markiert“.
c) $\frac{0{,}294}{0{,}315} \approx 0{,}9333$. Man teilt „Spam und markiert“ durch „markiert“.
d) $\frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{1-0{,}315} = \frac{0{,}006}{0{,}685} \approx 0{,}0088$. Man teilt „Spam und nicht markiert“ durch „nicht markiert“.
e) Markiert: $0{,}315 \cdot 500 = 157{,}5$, zu Unrecht: $0{,}021 \cdot 500 = 10{,}5$, also etwa 10 bis 11 Mails pro Tag.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $P(G) = \frac{110}{200} = 0{,}55$; $P_V(G) = \frac{66}{120} = 0{,}55$; $P_{keinV}(G) = \frac{44}{80} = 0{,}55$. Alle drei Werte stimmen überein: unabhängig. Man vergleicht den Anteil guter Noten insgesamt mit den Anteilen in beiden Gruppen.
b) $P(G) = \frac{120}{200} = 0{,}6$; $P_{>2h}(G) = \frac{30}{80} = 0{,}375$; $P_{\leq 2h}(G) = \frac{90}{120} = 0{,}75$. Die Werte sind verschieden: abhängig. Hier unterscheiden sich die Anteile stark.
c) Von den Vielnutzern haben nur 37,5 % eine gute Note, von den Wenignutzern dagegen 75 %. Der Unterschied beträgt 37,5 Prozentpunkte.
d) Nein. Ein Zusammenhang in den Daten ist keine Ursache. Es kann andere Gründe geben, zum Beispiel weniger Zeit zum Lernen oder Ablenkung durch andere Dinge. Mit Wahrscheinlichkeiten beschreibt man hier nur, wie die Merkmale zusammen auftreten.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $P_M(L) = \frac{20}{50} = 0{,}4$. Man betrachtet nur die 50 Mädchen.
b) $P_L(M) = \frac{20}{30} \approx 0{,}667$. Man betrachtet nur die 30 Schüler, die London gewählt haben.

c) $P_W(J) = \frac{12}{24} = 0{,}5$. Man betrachtet nur die 24 Schüler, die Wien gewählt haben.
d) $P(B) = \frac{36}{90} = 0{,}4$; $P_M(B) = \frac{18}{50} = 0{,}36 \neq 0{,}4$: nicht unabhängig. Man vergleicht den Gesamtanteil mit dem Anteil unter den Mädchen.
e) Mädchen $\frac{50}{90}$: Berlin $\frac{18}{50}$, London $\frac{20}{50}$, Wien $\frac{12}{50}$. Jungen $\frac{40}{90}$: Berlin $\frac{18}{40}$, London $\frac{10}{40}$, Wien $\frac{12}{40}$. Pfade: $\frac{18}{90}$, $\frac{20}{90}$, $\frac{12}{90}$, $\frac{18}{90}$, $\frac{10}{90}$, $\frac{12}{90}$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $P = \frac{1}{3}$, also gewinnt „Bleiben“ in $\frac{1}{3}$ der Fälle. Am Anfang steht das Auto mit gleicher Wahrscheinlichkeit hinter jeder Tür.
b) Auto hinter 1 ($\frac{1}{3}$): Moderator öffnet 2 oder 3 mit je $\frac{1}{2}$. Auto hinter 2 ($\frac{1}{3}$): er öffnet 3 mit Sicherheit. Auto hinter 3: er öffnet nie 3. $P(3 \text{ offen}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Man unterscheidet die drei möglichen Positionen des Autos und multipliziert entlang der Pfade.
c) $P = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Ja, Wechseln verdoppelt die Gewinnchance. Man teilt den Pfad „Auto hinter 2 und Tür 3 geöffnet“ durch die Wahrscheinlichkeit „Tür 3 geöffnet“.
d) Bleiben: $\frac{1}{3} \cdot 300 = 100$ Gewinne; Wechseln: $\frac{2}{3} \cdot 300 = 200$ Gewinne. Die Simulation bestätigt die Rechnung.