Lernzettel - Vektoren und Geometrie im Raum

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Flugzeuge über Frankfurt

Die Fluglotsen am Frankfurter Flughafen sehen auf ihrem Radar nicht nur, wo sich ein Flugzeug über der Landkarte befindet, sondern auch, in welcher Höhe es fliegt. Jede Position ist durch **drei Koordinaten** festgelegt: Ost-West, Nord-Süd und die Höhe. Die Flugrichtung und die Strecke, die ein Flugzeug in einer Minute zurücklegt, beschreibt man mit einem **Vektor**. Mit Vektoren lassen sich Abstände berechnen, Mittelpunkte bestimmen, Körper wie Würfel, Pyramiden oder Dächer im Koordinatensystem darstellen und Flugbahnen als **Geraden im Raum** beschreiben. Daraus ergibt sich die entscheidende Frage für die Flugsicherung: Kreuzen sich zwei Flugbahnen, oder gehen sie aneinander vorbei?

Punkte und Vektoren im Raum

Im räumlichen Koordinatensystem wird ein Punkt durch drei Koordinaten angegeben: $P(x \mid y \mid z)$. Ein **Vektor** beschreibt eine Verschiebung, also eine Richtung mit einer Länge.

Man schreibt ihn als Spalte, zum Beispiel . Vektoren, die durch

Parallelverschiebung ineinander übergehen, sind gleich. Der **Ortsvektor** $\vec{p}$ eines Punktes P zeigt vom Ursprung zu P und hat dieselben Koordinaten wie P.

Verbindungsvektor

Der Vektor von A nach B ist , also „Spitze minus Fuß“. Beispiel: $A(1 \mid 2 \mid 3)$ und

$B(4 \mid 0 \mid 5)$ ergeben . In der Ebene hast du nur zwei Koordinaten, der Rest

bleibt gleich.

Rechnen mit Vektoren

- **Addition und Subtraktion** komponentenweise: .

- **Skalarmultiplikation** (S-Multiplikation): . Ein negativer Faktor kehrt die Richtung um.
- Zwei Vektoren sind **parallel** (kollinear), wenn einer ein Vielfaches des anderen ist: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$. Beispiel: .

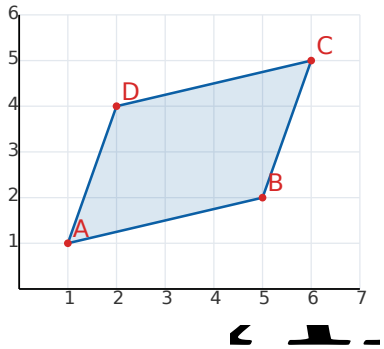
Länge eines Vektors

Der Betrag (die Länge) von ist $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Das folgt aus dem Satz des Pythagoras, zweimal angewandt. Beispiele: und . Der **Abstand** zweier Punkte A, B ist . Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**. Du erhältst ihn durch $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$. Für ist $|\vec{a}| = 5$ und der Einheitsvektor .

Mittelpunkt einer Strecke

Der Mittelpunkt von A und B hat den Ortsvektor $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Beispiel: $A(2\,|\,-4\,|\,6)$ und $B(8\,|\,2\,|\,0)$ ergeben $M(5\,|\,-1\,|\,3)$.

Parallelogramm



Ein Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm, wenn gilt. Daraus erhältst du die

vierte Ecke: . In der Abbildung ist und . Die Diagonalen halbieren sich: Die Mitte von AC ist $(3{,}5 \mid 3)$, ebenso die Mitte von BD.

Geraden

Eine Gerade durch den Punkt A mit der Richtung $\vec{u}$ hat die **Parametergleichung** $g:\ \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Der Vektor $\vec{a}$ heißt Stützvektor, $\vec{u}$ Richtungsvektor. Durch zwei Punkte A und B legst du fest. Beispiel: $A(1 \mid 2 \mid 0)$, $B(3 \mid 6 \mid 4)$ ergeben

.

Punktprobe: Ein Punkt P liegt auf g, wenn es ein t gibt, das alle drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt. Für $P(5 \mid 10 \mid 8)$: $1 + 2t = 5 \Rightarrow t = 2$; $2 + 4t = 10$ stimmt für $t = 2$; $4t = 8$ stimmt ebenfalls. P liegt auf g. Für $R(3 \mid 6 \mid 3)$ ergibt die erste Gleichung $t = 1$, die dritte $4t = 3$ widerspricht: R liegt nicht auf g.

Schnittpunkt zweier Geraden in der Ebene

Für $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ setzt du gleich: $t = 4 - s$ und $1 + 2t = s$. Einsetzen ergibt $1 + 8 - 2s = s$, also $s = 3$ und $t = 1$. Der Schnittpunkt ist $S(1 \mid 3)$. Probe: Beide Parameter führen auf denselben Punkt.

Vektoren in der Ebene und im Raum

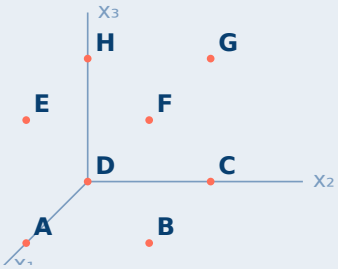
Alle Rechenregeln gelten in der Ebene genauso wie im Raum, nur dass dort eine Koordinate fehlt. Viele Aufgaben lassen sich deshalb zuerst in der Ebene üben und dann auf den Raum übertragen. Wichtig ist, dass du jede Komponente einzeln behandelst und die Reihenfolge der Koordinaten nie vertauschst. Bei Anwendungsaufgaben, etwa der Flugbahn einer Drohne oder dem Verlauf einer Seilbahn, wählst du das Koordinatensystem so, dass der Startpunkt im Ursprung liegt und die Einheit ein Meter ist. Dann lassen sich Weglängen und Abstände direkt mit der Längenformel berechnen.

Definition: Ortsvektor, Verbindungsvektor und Gegenvektor

Der **Ortsvektor** eines Punktes P zeigt vom Ursprung O zum Punkt und hat dieselben Koordinaten wie P. Der **Verbindungsvektor** beschreibt die Verschiebung von A nach B. Der **Gegenvektor** $-\vec{a}$ hat dieselbe Länge wie $\vec{a}$, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung; es gilt . Der **Nullvektor** $\vec{o}$ hat nur Nullen als Koordinaten.

Hinweis: Das Schrägbild

Für Zeichnungen im Heft verwendet man in Deutschland meist die **Kavalierperspektive**: Die x_2-Achse zeigt nach rechts, die x_3-Achse nach oben, und die x_1-Achse wird schräg nach links unten gezeichnet, unter 45° und mit dem Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ verkürzt. Auf Karopapier geht man dafür bei einer Einheit in x_1-Richtung eine halbe Kästchendiagonale. Kanten, die man nicht sieht, werden gestrichelt. Die Abbildung zeigt einen Würfel der Kantenlänge 4.



Merke: Rechengesetze für Vektoren

Für Vektoren gelten dieselben Gesetze wie für Zahlen: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (Kommutativgesetz), $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (Assoziativgesetz) und $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$ (Distributivgesetz). Ein Ausdruck der Form $r\vec{a}+s\vec{b}$ heißt **Linearkombination** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Eine geschlossene Vektorkette, zum Beispiel [redacted], ergibt immer den Nullvektor.

Beispiel 5

Berechne den Abstand der Punkte $A(1\,|\,2\,|\,-1)$ und $B(3\,|\,-1\,|\,5)$.

Verbindungsvektor: [redacted]. Länge: [redacted]. Die Punkte sind 7 Längeneinheiten voneinander entfernt. Beachte: Das Quadrat einer negativen Zahl ist positiv.

So gehst du vor: Punktprobe bei einer Geraden

1. Setze den Ortsvektor des Punktes P mit der Geradengleichung $\vec{x}=\vec{a}+t\cdot\vec{u}$ gleich.
2. Schreibe die Gleichung zeilenweise als drei Gleichungen für t.

3. Löse jede Gleichung nach t auf.
4. Erhältst du in allen drei Zeilen denselben Wert für t, liegt P auf der Geraden; sonst nicht.

Beispiel 6

Stelle die Gerade durch $A(1\,|\,0\,|\,2)$ und $B(3\,|\,4\,|\,0)$ auf und prüfe, ob $P(5\,|\,8\,|\,-2)$ und $Q(2\,|\,2\,|\,2)$ auf ihr liegen.

Richtungsvektor , also . Für P: $1+2t=5$, $4t=8$, $2-2t=-2$ liefern jeweils $t=2$: P liegt auf g. Für Q: $1+2t=2$ ergibt $t=0{,}5$, $4t=2$ ebenfalls $t=0{,}5$, aber $2-2t=2$ verlangt $t=0$. Widerspruch: Q liegt nicht auf g.

Satz: Lagebeziehungen zweier Geraden im Raum

Zwei Geraden im Raum sind entweder **identisch**, **echt parallel**, **schneidend** oder **windschief**. Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander, sind die Geraden parallel oder identisch; die Punktprobe mit dem Stützpunkt der einen Geraden entscheidet. Sind sie keine Vielfachen, setzt man die Geradengleichungen gleich: Hat das Gleichungssystem eine Lösung, schneiden sich die Geraden, sonst sind sie windschief. Windschiefe Geraden gibt es nur im Raum, nicht in der Ebene.

Beispiel 7

Untersuche die Lage von und .

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander (die zweite Koordinate ist einmal 1, einmal 0). Gleichsetzen ergibt $1+s=t$, $s=1$, $0=1-t$. Aus der zweiten Zeile folgt $s=1$, aus der dritten $t=1$, eingesetzt in die erste: $2=1$. Widerspruch, also gibt es keinen Schnittpunkt: Die Geraden sind windschief.

Beispiel 8

Im Dreieck $A(2\,|\,0\,|\,1)$, $B(4\,|\,2\,|\,0)$, $C(0\,|\,1\,|\,3)$ sollen die Seitenlängen bestimmt werden.

, , . Das Dreieck ist gleichschenklig mit der Spitze A.

So gehst du vor: Lage zweier Geraden untersuchen

1. Prüfe, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.
2. Falls ja: Setze den Stützpunkt der einen Geraden in die andere ein. Liegt er darauf, sind die Geraden identisch, sonst echt parallel.
3. Falls nein: Setze beide Geradengleichungen mit verschiedenen Parametern s und t gleich und löse zwei der drei Zeilen.
4. Prüfe die Lösung in der dritten Zeile. Ist sie erfüllt, schneiden sich die Geraden, und du berechnest den Schnittpunkt durch Einsetzen; sonst sind die Geraden windschief.

Beispiel 9

Ein Kran hebt eine Last vom Punkt $A(2\,|\,1\,|\,0)$ zum Punkt $B(8\,|\,9\,|\,0)$ auf einer Baustelle (in Metern). Wie weit wird die Last bewegt, und wo ist sie nach der Hälfte des Weges?

Der Verbindungsvektor ist , seine Länge $\sqrt{36+64}=10$ m. Der Mittelpunkt hat den Ortsvektor $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, also liegt die Last nach der Hälfte des Weges bei $M(5\,|\,5\,|\,0)$, wenn der Kran sie auf geradem Weg bewegt.

Achtung

Beim Verbindungsvektor gilt „Spitze minus Fuß“: , nicht umgekehrt. Bei der Länge werden alle Koordinaten quadriert, auch negative. Bei der Punktprobe reicht es nicht, wenn zwei Zeilen passen: Alle drei Zeilen müssen denselben Parameter liefern. Und ein Punkt hat Koordinaten in der Schreibweise $P(1\,|\,2\,|\,3)$, ein Vektor wird als Spalte geschrieben.

Wusstest du?

Die Vektorrechnung geht wesentlich auf den Stettiner Gymnasiallehrer Hermann Graßmann zurück, der 1844 seine „Lineale Ausdehnungslehre“ veröffentlichte. Seine Ideen wurden zunächst kaum verstanden, sind heute aber Grundlage der Computergrafik: Jedes 3D-Spiel und jedes Navigationssystem rechnet ständig mit Vektoren. Auch die GPS-Satelliten bestimmen deine Position aus Abständen im dreidimensionalen Raum.

Häufige Fehler

- Verbindungsvektor falsch herum: , nicht $\vec{a} - \vec{b}$.
- Bei der Länge die Quadrate der Koordinaten vergessen oder die Wurzel weglassen.
- Bei der Punktprobe nur zwei der drei Gleichungen prüfen.
- Bei der Parallelität nur eine Komponente vergleichen, statt alle drei mit demselben Faktor k.
- Die Vektoren als Punkte schreiben: Punkte haben runde Klammern mit Trennstrichen, Vektoren Spalten.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Punkt $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$; Ortsvektor $\vec{p}$ mit denselben Koordinaten.
- Verbindungsvektor (Spitze minus Fuß); .
- Rechnen komponentenweise; $r\vec{a}$ streckt, ein negativer Faktor kehrt die Richtung um.
- Länge $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; Abstand .
- Mittelpunkt $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; Parallelogramm $ABCD$: .
- Kollinear: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ mit demselben k in allen Koordinaten.
- Gerade $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$; Punktprobe: dasselbe t in allen Zeilen.
- Zwei Geraden im Raum: identisch, parallel, schneidend oder windschief.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Skizziere ein Schrägbild oder zumindest die Ebene und trage die Punkte ein, bevor du rechnest. Beschrifte den Vektor mit einem Pfeil von A nach B.

Das verhindert Vorzeichenfehler, und du erkennst sofort, ob dein Ergebnis plausibel ist.

Zusammenfassung

Vektoren beschreiben Verschiebungen, Richtungen und Abstände im Raum. Du berechnest Verbindungsvektoren, Längen, Mittelpunkte und Parallelogramme und beschreibst Geraden mit Parametergleichungen. Damit schaffst du die Grundlage für die analytische Geometrie in der Qualifikationsphase, wo Ebenen, Winkel und Abstände folgen. Mit der Punktprobe prüfst du Lagebeziehungen von Punkt und Gerade.

Würfel und Quader im Koordinatensystem

Quader und Würfel lassen sich einfach in Koordinaten beschreiben. Hat ein Quader die Kantenlängen a, b, c und liegt eine Ecke im Ursprung, so ist die gegenüberliegende Ecke $G(a \mid b \mid c)$. Die Raumdiagonale hat die Länge $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, beim Würfel mit Kante a also

$a\sqrt{3}$. Für $a = 4$ ergibt sich $4\sqrt{3} \approx 6{,}93$.