Arbeitsblatt - Vektoren und Geometrie im Raum

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Verbindungsvektoren

Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,3)$, $B(4\,|\,-1\,|\,5)$ und $C(0\,|\,0\,|\,2)$.

a) Berechne , und .

b) Berechne und erkläre das Ergebnis.

c) Gib an.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Rechnen mit Vektoren

Gegeben sind und .

a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $\vec{a}-\vec{b}$

c) $3\vec{a}-2\vec{b}$

d) $-\vec{a}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Längen von Vektoren

Berechne die Längen der Vektoren. Gib exakte Werte und, wo nötig, Näherungen an.

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Abstand und Mittelpunkt

Gegeben sind $A(2\,|\,-1\,|\,4)$ und $B(6\,|\,3\,|\,2)$.

a) Berechne .

b) Berechne den Abstand der Punkte.

c) Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke AB.

d) Prüfe, dass halb so groß ist wie .

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Kollinear oder nicht?

Prüfe jeweils, ob die Vektoren kollinear (parallel) sind. Gib gegebenenfalls den Faktor k an.

a) und

b) und

c) und

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Die vierte Ecke des Parallelogramms

Die Punkte $A(1\,|\,0\,|\,2)$, $B(4\,|\,1\,|\,3)$ und $C(5\,|\,4\,|\,1)$ sind Ecken eines Parallelogramms $ABCD$.

a) Berechne und bestimme D mit .

b) Prüfe, dass gilt.

c) Zeige, dass sich die Diagonalen halbieren.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Geradengleichung und Punktprobe

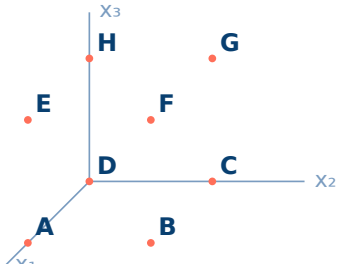
Die Gerade g geht durch $A(2\,|\,1\,|\,0)$ und $B(4\,|\,0\,|\,3)$.

a) Stelle eine Gleichung von g auf.
b) Liegt $P(8\,|\,-2\,|\,9)$ auf g?
c) Liegt $Q(0\,|\,2\,|\,-3)$ auf g?
d) Liegt $R(6\,|\,-1\,|\,5)$ auf g?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Spielwürfel

Ein großer Schaumstoffwürfel für den Sportunterricht hat die Kantenlänge 4 dm. Er steht so im Koordinatensystem: D im Ursprung, $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $C(0\,|\,4\,|\,0)$, die Deckfläche $EFGH$ liegt in der Höhe 4.



a) Gib die Koordinaten aller acht Ecken an.

b) Berechne die Länge der Flächendiagonale .

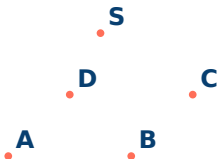
c) Berechne die Länge der Raumdiagonale .

d) M ist der Mittelpunkt der Deckfläche. Berechne .

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Das Pyramidenzelt

Ein Zelt für das Zeltlager hat eine quadratische Grundfläche mit den Ecken $A(2\,|\,0\,|\,0)$, $B(2\,|\,2\,|\,0)$, $C(0\,|\,2\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$ und die Spitze $S(1\,|\,1\,|\,1{,}5)$ (in Metern). Die vier Seitenkanten sind Stangen.



a) Wie hoch ist das Zelt?

b) Berechne und die Länge einer Stange.

c) Wie viele Meter Stange werden insgesamt gebraucht?
d) In der Mitte der Stange AS wird eine Lampe befestigt. Gib ihre Position an.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Drohne über dem Schulhof

Eine Drohne startet im Punkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$ und fliegt geradlinig. In jeder Sekunde

verschiebt sie sich um (in Metern).

a) Gib die Position nach t Sekunden an.
b) Wo ist die Drohne nach 4 Sekunden?
c) Wie weit ist sie dann vom Start entfernt?
d) Wann erreicht sie die Höhe 9 m und wo ist sie dann?
e) Wie schnell fliegt die Drohne?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Zwei Flugbahnen

Zwei Flugzeuge fliegen geradlinig (Koordinaten in km, t in Minuten):

und .

a) Wo sind beide Flugzeuge nach einer Minute?
b) Wie weit sind sie dann voneinander entfernt?
c) Schneiden sich die Flugbahnen? Untersuche die Lage der Geraden.
d) Wie groß ist der Abstand zur Zeit $t = 2{,}5$? Ist die Situation gefährlich?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Das Satteldach

Ein Wohnhaus ist ein Quader mit $0 \le x_1 \le 10$, $0 \le x_2 \le 8$ und der Traufhöhe 6 m. Der

First verläuft von $F_1(0\,|\,4\,|\,9)$ nach $F_2(10\,|\,4\,|\,9)$ (in Metern).

a) Gib die vier oberen Ecken des Quaders an.
b) Berechne die Länge der Dachschräge von $(0\,|\,0\,|\,6)$ bis F_1.
c) Berechne die gesamte Dachfläche.
d) Für einen Quadratmeter braucht man 15 Dachziegel. Wie viele Ziegel werden benötigt?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Mast mit drei Seilen

Ein 12 m hoher Mast steht im Ursprung, seine Spitze ist $S(0\,|\,0\,|\,12)$. Er wird mit drei Seilen gesichert, die in $A(5\,|\,0\,|\,0)$, $B(-3\,|\,4\,|\,0)$ und $C(-3\,|\,-4\,|\,0)$ verankert sind.



a) Berechne , und .

b) Berechne die Längen der drei Seile.
c) Wie viel Seil muss man kaufen, wenn für Knoten $10\,\%$ zugeschlagen werden?
d) Erkläre, warum alle Seile gleich lang sind.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Zwei Wanderwege auf der Karte

Auf einer Wanderkarte (Einheit km) verlaufen zwei gerade Wege: $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

a) Stelle das Gleichungssystem für den Schnittpunkt auf.
b) Löse es.
c) Gib den Kreuzungspunkt an.
d) Wie weit ist die Kreuzung vom Startpunkt $(1\,|\,2)$ entfernt?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Lagebeziehungen untersuchen

Gegeben ist . Untersuche die Lage von g zu den folgenden Geraden.

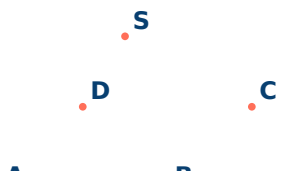
Gerade	Stützvektor	Richtungsvektor
h		
k		
m		

a) Lage von g und h
b) Lage von g und k; bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt
c) Lage von g und m
d) Welche Lagebeziehung kann in der Ebene nicht vorkommen? Begründe.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Glaspyramide

Vor einem Einkaufszentrum in Leipzig steht eine Glaspyramide mit quadratischer Grundfläche $A(6|0|0)$, $B(6|6|0)$, $C(0|6|0)$, $D(0|0|0)$ und Spitze $S(3\,|\,3\,|\,4)$ (in Metern). Ein Quadratmeter Spezialglas kostet *180\,€*.



a) Berechne die Länge einer Seitenkante.
b) M ist der Mittelpunkt von AB. Berechne .
c) Begründe, dass MS die Höhe des Dreiecks ABS ist.
d) Berechne die gesamte Glasfläche der vier Seiten.
e) Was kostet das Glas?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Der Schatten des Fahnenmasts

Die Spitze eines Fahnenmasts auf dem Schulhof ist $P(2\,|\,3\,|\,8)$, sein Fußpunkt $F(2\,|\,3\,|\,0)$

(in Metern). Am Vormittag fallen die Sonnenstrahlen in Richtung .

a) Stelle die Gerade durch P in Richtung $\vec{v}$ auf.
b) Bestimme den Schattenpunkt auf dem Boden ($x_3 = 0$).
c) Wie lang ist der Schatten?

d) Am Nachmittag ist die Richtung . Bestimme die neue Schattenlänge.

e) Begründe, warum der Schatten am Nachmittag länger ist.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die Bergtour

Eine Wandergruppe aus dem Allgäu startet an der Talstation $A(0\,|\,0\,|\,0{,}3)$ und geht zum Gipfel $B(2{,}4\,|\,1{,}8\,|\,1{,}1)$ (in km, x_3 ist die Höhe über dem Meer).

a) Berechne .

b) Wie lang ist die Luftlinie zwischen Talstation und Gipfel?
c) Wie groß ist die waagerechte Entfernung? Berechne die mittlere Steigung in Prozent.
d) Auf halbem Weg liegt eine Hütte. Gib ihre Koordinaten und ihre Höhe an.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Das Mittenviereck

Gegeben ist das (räumliche) Viereck $A(0|0|0)$, $B(4|0|2)$, $C(6|4|0)$, $D(0|2|4)$. Verbindet man die Seitenmitten, entsteht ein neues Viereck.

a) Bestimme die Mittelpunkte M_1 bis M_4 der Seiten AB, BC, CD, DA.

b) Zeige, dass gilt.

c) Zeige allgemein: .

d) Was folgt daraus für das Mittenviereck?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Parameter bestimmen

Bestimme die fehlenden Zahlen.

a) Für welche a und b sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 4 \end{pmatrix}$ kollinear?

b) Für welche a hat $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ die Länge 3?

c) In welchem Punkt trifft $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die x_1x_2-Ebene?