Lösungen - Vektoren und Geometrie im Raum

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) , , .

b) Summe : Wer von A über B und C zurück nach A geht, ist insgesamt nicht verschoben.

c) .

Merke: Den Verbindungsvektor von P nach Q erhält man mit „Spitze minus Fuß“: . Ein geschlossener Weg $A \to B \to C \to A$ führt an den Ausgangspunkt zurück, deshalb ergibt die Summe den Nullvektor. Der Gegenvektor hat dieselbe Länge, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung.

Lösung zu Aufgabe 2

a) , komponentenweise addiert.

b) .

c) , , also .

d) : gleiche Länge, entgegengesetzte Richtung.

Merke: Vektoren werden komponentenweise addiert und subtrahiert; bei der Multiplikation mit einer Zahl wird jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert. Bei c) rechnet man zuerst die Vielfachen und dann die Differenz. Probe für c): erste Komponente $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 6 + 2 = 8$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$.
b) $\sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$.
c) $\sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5$.
d) $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.
Merke: Die Länge eines Vektors berechnet man mit dem räumlichen Satz des Pythagoras: Wurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten. Negative Komponenten werden beim Quadrieren positiv. Vektoren mit ganzzahliger Länge wie a) bis c) entstehen aus pythagoreischen Zahlentripeln.

Lösung zu Aufgabe 4

a) .

b) .

c) , also $M(4\,|\,1\,|\,3)$.

d) , ✓.

Begründung: Der Abstand zweier Punkte ist die Länge ihres Verbindungsvektors. Den Mittelpunkt erhält man als Mittelwert der Ortsvektoren, also komponentenweise als Mittelwert der Koordinaten. Antwort: Die Punkte sind 6 Einheiten voneinander entfernt, der Mittelpunkt ist $M(4\,|\,1\,|\,3)$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $2 = k \cdot (-1) \Rightarrow k = -2$; $-4 = -2 \cdot 2$ ✓, $6 = -2 \cdot (-3)$ ✓: kollinear mit $k = -2$.
b) Aus der ersten Zeile $k = \frac{1}{2}$, aus der dritten $k = \frac{3}{5}$: verschieden, also nicht kollinear.
c) $0 = k \cdot 0$ gilt immer; $3 = k \cdot (-6) \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$; $-1 = -\frac{1}{2} \cdot 2$ ✓: kollinear.
Merke: Zwei Vektoren sind kollinear, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist. Man bestimmt den Faktor k aus einer Komponente und prüft ihn in allen anderen. Liefert eine Komponente einen anderen Faktor, sind die Vektoren nicht kollinear. Ein negativer Faktor bedeutet entgegengesetzte Richtung.

Lösung zu Aufgabe 6

a) ; , also $D(2\,|\,3\,|\,0)$.

b) , ✓.

c) Mittelpunkt von AC: $(3\,|\,2\,|\,1{,}5)$; Mittelpunkt von BD: $(\frac{4+2}{2}\,|\,\frac{1+3}{2}\,|\,\frac{3+0}{2}) = (3\,|\,2\,|\,1{,}5)$. Beide stimmen überein.
Begründung: In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel, also gilt . Deshalb erreicht man D, indem man von A aus den Vektor abträgt. Dass sich die Diagonalen halbieren, ist eine weitere Eigenschaft jedes Parallelogramms.

Lösung zu Aufgabe 7

a) .

b) $2 + 2t = 8 \Rightarrow t = 3$; $1 - t = -2 \Rightarrow t = 3$; $3t = 9 \Rightarrow t = 3$: ja, P liegt auf g.
c) $2 + 2t = 0 \Rightarrow t = -1$; $1 - t = 2 \Rightarrow t = -1$; $3t = -3 \Rightarrow t = -1$: ja.
d) $2 + 2t = 6 \Rightarrow t = 2$; $1 - t = -1 \Rightarrow t = 2$; $3t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$: Widerspruch, R liegt nicht auf g.
Merke: Für die Geradengleichung nimmt man einen Punkt als Stützvektor und den Verbindungsvektor als Richtungsvektor. Bei der Punktprobe muss in allen drei Zeilen derselbe Parameter herauskommen. P entspricht $t = 3$, Q entspricht $t = -1$; bei R widersprechen sich die Werte, also liegt R nicht auf g.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$, $D(0|0|0)$, $E(4|0|4)$, $F(4|4|4)$, $G(0|4|4)$, $H(0|0|4)$.

b) , dm.

c) , dm.

d) $M(2\,|\,2\,|\,4)$; , dm.

Begründung: Die Flächendiagonale verläuft in einer Seitenfläche, die Raumdiagonale quer durch den Würfel. Bei der Kantenlänge a gilt allgemein: Flächendiagonale $a\sqrt{2}$, Raumdiagonale $a\sqrt{3}$. Mit $a = 4$ dm erhält man genau die berechneten Werte.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Die Höhe ist die x_3-Koordinate der Spitze: $1{,}5$ m.

b) , m.

c) Alle vier Stangen sind gleich lang: $4 \cdot \sqrt{4{,}25} \approx 8{,}25$ m.
d) $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{s})$: $(1{,}5\,|\,0{,}5\,|\,0{,}75)$.
Begründung: Die Spitze liegt genau über dem Mittelpunkt der Grundfläche, deshalb sind alle vier Stangen gleich lang. Die Lampe liegt im Mittelpunkt der Strecke AS, ihre Koordinaten sind die Mittelwerte der Koordinaten von A und S. Sie hängt also 75 cm über dem Boden.

Lösung zu Aufgabe 10

a) .

b) $(8\,|\,4\,|\,6)$.
c) $\sqrt{64+16+36} = \sqrt{116} \approx 10{,}77$ m.
d) $1{,}5t = 9 \Rightarrow t = 6$; Position $(12\,|\,6\,|\,9)$.
e) $|\vec{v}| = \sqrt{4+1+2{,}25} = \sqrt{7{,}25} \approx 2{,}69$ m/s.
Begründung: Die Drohne bewegt sich gleichförmig; ihr Ortsvektor ist ein Vielfaches des Geschwindigkeitsvektors. Die Entfernung vom Start ist die Länge des Ortsvektors, die Geschwindigkeit die Länge von $\vec{v}$. Probe zu c): $4 \cdot 2{,}69 \approx 10{,}77$ m.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $F_1(4\,|\,3\,|\,10)$, $F_2(16\,|\,3\,|\,11)$.

b) Differenz , Abstand $\sqrt{145} \approx 12{,}04$ km.

c) Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear. Gleichsetzen mit verschiedenen Parametern: $4s = 20 - 4t$, $3s = 3t$, $10 = 11$. Die letzte Zeile ist ein Widerspruch: Die Bahnen sind windschief.
d) $F_1(10\,|\,7{,}5\,|\,10)$, $F_2(10\,|\,7{,}5\,|\,11)$: genau übereinander mit 1 km Höhenunterschied. Die Staffelung von etwa 300 m wird eingehalten, die Lage ist sicher.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $(0|0|6)$, $(10|0|6)$, $(10|8|6)$, $(0|8|6)$.

b) Vektor , Länge $\sqrt{16+9} = 5$ m.

c) Jede Dachseite ist ein Rechteck 10 m $\times$ 5 m: $2 \cdot 50 = 100\,\text{m}^2$.

d) $100 \cdot 15 = 1500$ Ziegel.
Begründung: Die Dachschräge verbindet die Traufe in 6 m Höhe mit dem First in 9 m Höhe; sie ist 4 m waagerecht und 3 m senkrecht, also nach Pythagoras 5 m lang. Beide Dachhälften sind gleich groß. Antwort: 100 Quadratmeter Dachfläche, also 1500 Ziegel.

Lösung zu Aufgabe 13

a) , , .

b) $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ m; $\sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ m; ebenso 13 m.
c) $3 \cdot 13 \cdot 1{,}1 = 42{,}9$ m.
d) Alle Ankerpunkte haben vom Fußpunkt den Abstand 5 ($\sqrt{9 + 16} = 5$), und der Mast ist überall gleich hoch: Nach Pythagoras ist jedes Seil $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ m lang.
Antwort: Jedes Seil ist 13 m lang; mit Zuschlag kauft man $42{,}9$ m Seil. Die Rechnung zeigt den räumlichen Pythagoras: Der Verbindungsvektor vom Anker zur Spitze hat die Komponenten des waagerechten Abstands und der Masthöhe.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $1 + 2s = 7 - t$ und $2 + s = 2t$.
b) Aus der zweiten Gleichung $t = 1 + \frac{s}{2}$; eingesetzt:
$1 + 2s = 6 - \frac{s}{2} \Rightarrow 2{,}5s = 5 \Rightarrow s = 2$, $t = 2$.
c) g: $(1 + 4 \,|\, 2 + 2) = (5 \,|\, 4)$; Probe mit h: $(7 - 2 \,|\, 0 + 4) = (5 \,|\, 4)$ ✓.
d) km.

Begründung: Im Kreuzungspunkt müssen beide Geraden denselben Punkt liefern, deshalb setzt man die Gleichungen gleich. Es entstehen zwei Gleichungen für die zwei Parameter s und t. Antwort: Die Wege kreuzen sich in $(5 \,|\, 4)$, etwa $4{,}5$ km vom Startpunkt entfernt.

Lösung zu Aufgabe 15

a) : parallel oder identisch. Punktprobe $(3|0|4)$ in g: $s = 2$ in allen Zeilen ✓. Die Geraden sind identisch.
b) Richtungen nicht kollinear. $1 + s = t$, $2 - s = t$, $2s = 1 \Rightarrow s = 0{,}5$, $t = 1{,}5$; beide ersten Zeilen erfüllt. Schnittpunkt $S(1{,}5 \,|\, 1{,}5 \,|\, 1)$.
c) Richtungen nicht kollinear. $1 + s = 0 \Rightarrow s = -1$, aber $2 - s = 1 \Rightarrow s = 1$: Widerspruch. g und m sind windschief.
d) Windschief: Zwei nicht parallele Geraden in einer Ebene schneiden sich immer.

Lösung zu Aufgabe 16

a) , m.

b) $M(6\,|\,3\,|\,0)$, , m.

c) Das Dreieck ABS ist gleichschenklig ($|AS| = |BS| = \sqrt{34}$); die Verbindung der Spitze mit dem Mittelpunkt der Basis steht senkrecht auf der Basis.
d) $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 60\,\text{m}^2$.
e) *60\cdot180=10\,800\,€*.
Begründung: Jede Seitenfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundseite 6 m und der Höhe m. Ihr Flächeninhalt ist $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15\,\text{m}^2$. Antwort: Die vier Glasflächen haben zusammen 60 Quadratmeter und kosten $10\,800$ Euro.

Lösung zu Aufgabe 17

a) .

b) $8 - 4t = 0 \Rightarrow t = 2$: Schattenpunkt $(4\,|\,7\,|\,0)$.

c) m.

d) $8 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4$: $(10\,|\,7\,|\,0)$; Schattenlänge $\sqrt{64 + 16} \approx 8{,}94$ m.
e) Pro Meter Abstieg legt der Strahl am Vormittag $\frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}56$ m waagerecht zurück, am Nachmittag $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$ m: Die Sonne steht tiefer.
Begründung: Der Schattenpunkt ist der Punkt, in dem der Sonnenstrahl durch die Mastspitze den Boden erreicht; dort gilt $x_3 = 0$. Die Schattenlänge ist der Abstand dieses Punktes vom Fußpunkt F. Je flacher der Strahl einfällt, desto länger wird der Schatten.

Lösung zu Aufgabe 18

a) .

b) $\sqrt{5{,}76 + 3{,}24 + 0{,}64} = \sqrt{9{,}64} \approx 3{,}105$ km.
c) $\sqrt{2{,}4^2 + 1{,}8^2} = 3{,}0$ km; Steigung $\frac{0{,}8}{3} \approx 26{,}7\,\%$.
d) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$: $H(1{,}2\,|\,0{,}9\,|\,0{,}7)$, also 700 m über dem Meer.

Begründung: Die Luftlinie ist die Länge des Verbindungsvektors. Für die waagerechte Entfernung lässt man die Höhenkomponente weg. Antwort: Die Luftlinie ist etwa $3{,}1$ km lang, die mittlere Steigung beträgt etwa $27\,\%$, und die Hütte liegt auf 700 m Höhe.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $M_1(2|0|1)$, $M_2(5|2|1)$, $M_3(3|3|2)$, $M_4(0|1|2)$.

b) , ✓.

c) ; hier ✓.



d) Ebenso . Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel: Das Mittenviereck ist immer ein Parallelogramm.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Aus der ersten Zeile $k = 2$. Dann $a = 2 \cdot 3 = 6$ und $4 = 2b \Rightarrow b = 2$.
b) $a^2 + 4 + 4 = 9 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ oder $a = -1$.
c) $x_3 = 3 - t = 0 \Rightarrow t = 3$: Spurpunkt $(4\,|\,2\,|\,0)$.
Begründung: Bei a) bestimmt man den Faktor aus der vollständig bekannten ersten Komponente. Bei b) führt die Längenbedingung auf eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen. Bei c) liegt jeder Punkt der x_1x_2-Ebene auf der Höhe $x_3 = 0$; diesen Punkt nennt man Spurpunkt.