Lösungen zur Klassenarbeit - Trigonometrische Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (3 BE/Punkte)

a) Ein voller Kreis hat 360° bzw. 2π, also entspricht 180° genau π. Gradmaß ins Bogenmaß: $150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{150}{180}\pi = \frac{5\pi}{6}$ (1 P.). Bogenmaß ins Gradmaß: $\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ$ (1 P.).
b) $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$ liegt im zweiten Quadranten, dort ist der Sinus positiv. Der Einheitskreispunkt ist das Spiegelbild des Punktes zu 30° an der y-Achse und hat dieselbe y-Koordinate. Daher $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (1 P.). Der Kosinus wechselt dabei das Vorzeichen: $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Antwort: $\frac{5\pi}{6}$; 270°; $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Man vergleicht $f(x) = 2\sin(3x) + 1$ mit der allgemeinen Form $a\sin(bx) + d$: $a = 2$, $b = 3$, $d = 1$.
Amplitude: $|a| = 2$. Der Graph ist gegenüber $\sin x$ in y-Richtung um den Faktor 2 gestreckt (1 P.).
Periode: $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$. Der Graph ist in x-Richtung gestaucht, in einer Periode von $\sin x$ passen drei Schwingungen (1 P.).
Mittellinie: $y = d = 1$; um diese Gerade schwingt der Graph (1 P.).
Wertebereich: von $d - |a| = 1 - 2 = -1$ bis $d + |a| = 1 + 2 = 3$, also $W = [-1; 3]$ (1 P.).
Kontrolle: Das Maximum 3 wird bei $3x = \frac{\pi}{2}$, also $x = \frac{\pi}{6}$ erreicht, denn $2 \cdot 1 + 1 = 3$.
Antwort: Amplitude 2, Periode $\frac{2\pi}{3}$, Mittellinie $y = 1$, $W = [-1; 3]$.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Zuerst nach dem Kosinus auflösen: $\cos x = \frac{1}{2}$ (1 P.). Der Grundwert aus dem Taschenrechner oder dem Einheitskreis ist $x_1 = \frac{\pi}{3}$ (60°) (1 P.). Der Kosinus ist die x-Koordinate am Einheitskreis; den gleichen Wert hat der an der x-Achse gespiegelte Punkt, also $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (1 P.). Beide liegen in $[0; 2\pi]$. Probe: $2\cos 300^\circ = 2 \cdot 0{,}5 = 1$.
b) $\sin x = -1$ bedeutet y-Koordinate -1; das ist nur der tiefste Punkt $(0|-1)$ des Einheitskreises, bei 270°. Also gibt es genau eine Lösung $x = \frac{3\pi}{2}$ (1 P.). Im Graphen der Sinusfunktion ist das das einzige Minimum im Intervall. Antwort: a) $\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$; b) $\{\frac{3\pi}{2}\}$.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Ableitungsregeln: $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$. Mit der Faktorregel: $(3\sin x)' = 3\cos x$. Für $\cos(2x)$ braucht man die Kettenregel: äußere Ableitung $-\sin(2x)$, innere Ableitung 2, zusammen $-2\sin(2x)$ (1 P.). Also

$f'(x) = 3\cos x - 2\sin(2x)$. An der Stelle 0: $f'(0) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3$ (1 P.).
b) Berührpunkt: $f(0) = 3\sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$, also $P(0|1)$ (1 P.). Tangente mit Steigung 3: $t(x) = 3(x - 0) + 1 = 3x + 1$ (1 P.). Kontrolle: Für kleine x gilt $\sin x \approx x$ und $\cos(2x) \approx 1$, daher $f(x) \approx 3x + 1$, genau die Tangente. Häufiger Fehler: Die innere Ableitung 2 vergessen. Antwort: $f'(0) = 3$, Tangente $y = 3x + 1$.

Lösung zu Aufgabe 5 (5 BE/Punkte)

a) Die Mittellinie liegt zwischen Hoch- und Niedrigwasser: $d = \frac{4{,}2+0{,}6}{2} = 2{,}4$ m. Die Amplitude ist der halbe Tidenhub: $a = \frac{4{,}2-0{,}6}{2} = 1{,}8$ m. Von Hoch- bis Niedrigwasser vergeht eine halbe Periode, also $T = 2 \cdot 6{,}2 = 12{,}4$ h und $b = \frac{2\pi}{12{,}4}$. Der Kosinus hat bei $t = 0$ sein Maximum, passend zum Hochwasser um 0:00 Uhr (2 P.).
b) $h(3) = 1{,}8\cos(\frac{6\pi}{12{,}4}) + 2{,}4 \approx 1{,}8 \cdot 0{,}051 + 2{,}4 \approx 2{,}49$ m (1 P.). Der Rechner muss im Bogenmaß stehen.
c) $h(t) \geq 3$ führt auf $\cos(\frac{2\pi}{12{,}4}t) \geq \frac{1}{3}$. Mit $\arccos\frac{1}{3} \approx 1{,}231$ folgt $t \leq \frac{1{,}231 \cdot 12{,}4}{2\pi} \approx 2{,}43$ h; wegen der Symmetrie gilt dasselbe vor dem nächsten Hochwasser ab $12{,}4 - 2{,}43 \approx 9{,}97$ h. Zusammen etwa $2 \cdot 2{,}43 \approx 4{,}86$ h pro Periode (2 P.).