Lernzettel - Trigonometrische Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Ebbe und Flut an der Nordsee

Wer in Cuxhaven oder Büsum Urlaub macht, kennt den Gezeitenkalender: Ungefähr alle 12 Stunden und 25 Minuten kommt das Hochwasser zurück, dazwischen fällt das Watt trocken. Auch das Riesenrad auf dem Hamburger Dom, die Tageslänge im Laufe eines Jahres, der Wechselstrom aus der Steckdose und der eigene Herzschlag wiederholen sich in festen Abständen. Solche **periodischen Vorgänge** beschreibt man mit den **trigonometrischen Funktionen** Sinus und Kosinus. In diesem Kapitel lernst du das Bogenmaß kennen, liest Werte am Einheitskreis ab, verstehst die Wirkung der Parameter a, b, c und d, löst trigonometrische Gleichungen und leitest Sinus und Kosinus ab.

Bogenmaß

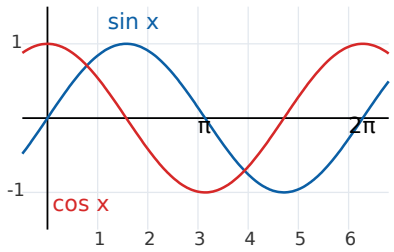
In der Analysis misst man Winkel im **Bogenmaß**. Der Winkel x entspricht der Länge des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis (Radius 1). Der Vollwinkel 360° hat die Bogenlänge 2π. Umrechnung: $x = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$. Wichtige Werte: $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, $360^\circ = 2\pi$. Der Taschenrechner muss auf **RAD** stehen, wenn du mit Bogenmaß rechnest.

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Am Einheitskreis gehört zum Winkel x der Punkt $P(\cos x \mid \sin x)$. Der Kosinus ist die x-Koordinate, der Sinus die y-Koordinate. Daraus folgen $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Graphen und Eigenschaften



- Beide Funktionen haben den Definitionsbereich $\mathbb{R}$, den Wertebereich $[-1;1]$ und die **Periode** 2π: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- $\sin$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung ($\sin(-x)=-\sin x$), $\cos$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse ($\cos(-x)=\cos x$).
- Nullstellen von $\sin$: $x=k\pi$ mit ganzem k. Nullstellen von $\cos$: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.
- Der Graph von $\cos$ entsteht aus dem von $\sin$ durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links: $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Allgemeine Sinusfunktion

Die Funktion $f(x)=a\cdot\sin\big(b(x-c)\big)+d$ hat die **Amplitude** $|a|$, die **Periode** $\frac{2\pi}{|b|}$, die Verschiebung c nach rechts und die Mittellinie $y=d$. Der Wertebereich ist $[d-|a|;\,d+|a|]$. Beispiel: $f(x)=2\sin(3x)+1$ hat die Amplitude 2, die Periode $\frac{2\pi}{3}$, die Mittellinie $y=1$ und den Wertebereich $[-1;3]$.

Ableitungen

Es gilt $(\sin x)'=\cos x$ und $(\cos x)'=-\sin x$. Mit der Verkettung durch kx gilt $(\sin(kx))'=k\cos(kx)$ und $(\cos(kx))'=-k\sin(kx)$. Beispiele: $(3\sin x)'=3\cos x$, $(\cos x+x^2)'=-\sin x+2x$, $(\sin 2x)'=2\cos 2x$, $(4\sin\frac{x}{2})'=2\cos\frac{x}{2}$. Die Ableitung von $\sin$ bei $x=0$ ist $\cos 0=1$. Die Tangente an $\sin x$ im Ursprung ist also $y=x$.

Parameter aus dem Graphen bestimmen

Ist ein Graph gegeben, liest du die Parameter in dieser Reihenfolge ab. Erstens: Hoch- und Tiefpunkt bestimmen die Mittellinie $d=\frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}$ und die Amplitude $a=\frac{y_{\max}-y_{\min}}{2}$. Zweitens: Der Abstand zweier benachbarter Hochpunkte ist die Periode p, daraus folgt $b=\frac{2\pi}{p}$. Drittens: Eine Verschiebung c liest du am ersten Schnittpunkt mit der Mittellinie ab, an dem der Graph steigt. Prüfe zum Schluss mit einem Punkt, ob deine Gleichung stimmt. Genau dieses Vorgehen wird in Klausuren häufig verlangt, weil es Verständnis statt Auswendiglernen prüft.

Trigonometrische Gleichungen

Beispiel: $\sin x=\frac{1}{2}$ im Intervall $[0;2\pi]$. Der Taschenrechner liefert $x_1=\frac{\pi}{6}$. Wegen der Symmetrie am Einheitskreis gilt außerdem $x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Für $\cos x=-\frac{1}{2}$ erhältst du $x_1=\frac{2\pi}{3}$ und $x_2=2\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$. Allgemein: Zu $\sin x=s$ gehören x und $\pi-x$, zu $\cos x=s$ gehören x und $2\pi-x$ (jeweils plus Vielfache von 2π).

Beispiel aus dem Alltag

Die Tagestemperatur wird oft durch $T(t)=10+8\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-9)\right)$ beschrieben (t in Stunden). Die Periode ist $\frac{2\pi}{\pi/12}=24$ Stunden. Das Maximum $10+8=18$ °C tritt auf, wenn das Argument $\frac{\pi}{2}$ ist, also bei $t=15$. Das Minimum 2 °C tritt bei $t=3$ auf.

Zusammenhang mit dem rechtwinkligen Dreieck

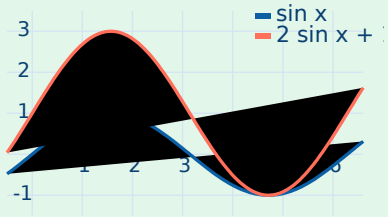
Du kennst Sinus und Kosinus bereits aus der Mittelstufe: Im rechtwinkligen Dreieck ist $\sin\alpha$ das Verhältnis aus Gegenkathete und Hypotenuse, $\cos\alpha$ das Verhältnis aus Ankathete und Hypotenuse. Der Einheitskreis erweitert diese Idee auf beliebige Winkel, auch auf Winkel über 90° und negative Winkel. Bei einem Winkel von 30° im Dreieck mit Hypotenuse 10 beträgt die Gegenkathete $10 \cdot \sin 30^\circ = 5$. Dasselbe Ergebnis erhältst du im Bogenmaß mit $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Definition: Periodische Funktion

Eine Funktion f heißt **periodisch** mit der Periode $p > 0$, wenn für alle x gilt: $f(x+p) = f(x)$. Die kleinste solche Zahl p heißt **Periodenlänge**. Sinus und Kosinus haben die Periodenlänge 2π. Die halbe Differenz zwischen größtem und kleinstem Funktionswert heißt **Amplitude**, die Gerade in der Mitte dazwischen heißt **Mittellinie**.

Merke: Wirkung der Parameter

Bei $f(x) = a \cdot \sin\big(b(x-c)\big) + d$ gilt: a streckt den Graphen in y-Richtung (für a wird er zusätzlich an der Mittellinie gespiegelt). b staucht oder streckt in x-Richtung, die Periode wird $p = \frac{2\pi}{|b|}$. c verschiebt den Graphen um c nach rechts, d verschiebt ihn um d nach oben. Die Abbildung zeigt $\sin x$ und $2\sin x + 1$: gleiche Periode, doppelte Amplitude, Mittellinie $y = 1$.



So gehst du vor: Funktionsgleichung aus Hoch- und Tiefpunkt

1. Mittellinie: $d = \frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}$.
2. Amplitude: $a = \frac{y_{\max}-y_{\min}}{2}$.
3. Periode p als Abstand zweier benachbarter Hochpunkte ablesen und $b = \frac{2\pi}{p}$ berechnen.
4. Verschiebung c: Stelle, an der der Graph die Mittellinie **steigend** schneidet (bei Sinus) oder einen Hochpunkt hat (bei Kosinus).
5. Funktionsgleichung aufschreiben und an einem weiteren Punkt prüfen.

Beispiel 5

In Büsum beträgt der Wasserstand bei Hochwasser $4{,}1$ m und bei Niedrigwasser $0{,}5$ m. Die Periode ist $12{,}4$ h, das erste Hochwasser ist um 3:00

Uhr. Stelle eine Funktion für den Wasserstand auf.

Mittellinie $d = \frac{4{,}1+0{,}5}{2} = 2{,}3$, Amplitude $a = \frac{4{,}1-0{,}5}{2} = 1{,}8$, $b = \frac{2\pi}{12{,}4} \approx 0{,}507$. Da um 3:00 Uhr ein Hochpunkt liegt, wählt man den Kosinus: $h(t) = 1{,}8\cos\big(0{,}507(t-3)\big) + 2{,}3$ (t in Stunden nach Mitternacht). Eine Darstellung mit dem Sinus ist ebenfalls möglich, dann ist $c = 3 - 3{,}1 = -0{,}1$.

Beispiel 6

Löse $\sin x = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0;2\pi]$.

Aus der Wertetabelle: $x_1 = \frac{\pi}{6}$. Wegen der Symmetrie $\sin(\pi - x) = \sin x$ ist auch $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ eine Lösung. Weitere Lösungen im Intervall gibt es nicht, denn zwischen π und 2π ist der Sinus negativ.

Beispiel 7

Löse $2\cos x + 1 = 0$ im Intervall $[0;2\pi]$.

Umformen: $\cos x = -\frac{1}{2}$. Der Kosinus ist im zweiten und dritten Viertel negativ. Wegen $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ sind die Lösungen $x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ und $x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Probe am Einheitskreis: Beide Punkte haben die x-Koordinate $-\frac{1}{2}$.

Beispiel 8

Bestimme die Tangente an $f(x) = 2\sin x$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Es gilt $f(\frac{\pi}{3}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ und $f'(x) = 2\cos x$, also $f'(\frac{\pi}{3}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Die Tangente lautet $t(x) = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \approx x + 0{,}685$.

Satz: Symmetrien am Einheitskreis

Für alle x gilt $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$. Mit diesen Beziehungen findest du zu einer Lösung einer trigonometrischen Gleichung die zweite Lösung in derselben Periode. Alle weiteren Lösungen erhältst du durch Addieren ganzzahliger Vielfacher der Periode.

So gehst du vor: Trigonometrische Gleichungen lösen

1. Forme die Gleichung so um, dass $\sin x$ oder $\cos x$ allein auf einer Seite steht, zum Beispiel $\sin x = k$.
2. Prüfe, ob $-1 \le k \le 1$ gilt. Sonst gibt es keine Lösung.
3. Bestimme eine erste Lösung x_1 mit der Wertetabelle oder mit $\sin^{-1}$ bzw. $\cos^{-1}$ im RAD-Modus.
4. Bestimme die zweite Lösung in derselben Periode mit der Symmetrie: $x_2 = \pi - x_1$ beim Sinus, $x_2 = 2\pi - x_1$ beim Kosinus.

5. Addiere bei Bedarf Vielfache von 2π, bis alle Lösungen im gesuchten Intervall gefunden sind, und mache die Probe.

Beispiel 9

Ein Riesenrad hat den Radius 20 m, die Achse liegt in 23 m Höhe, eine Umdrehung dauert 8 Minuten. Eine Gondel startet unten. Gib die Höhe als Funktion der Zeit an und berechne die Höhe nach 2 Minuten.

Die Gondel startet im Tiefpunkt, deshalb verwendet man den negativen Kosinus: Amplitude $a = 20$, Mittellinie $d = 23$, $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Also $h(t) = 23 - 20\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. Nach 2 Minuten, also einer Viertelumdrehung, gilt $h(2) = 23 - 20\cos\frac{\pi}{2} = 23$ m: Die Gondel befindet sich auf Höhe der Achse. Nach 4 Minuten ist sie mit 43 m ganz oben.

Hinweis: Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck

Für spitze Winkel stimmen die Definitionen am Einheitskreis mit denen aus der Mittelstufe überein: Im rechtwinkligen Dreieck ist $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ und $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Beim Einheitskreis hat die Hypotenuse die Länge 1, deshalb sind die Katheten direkt $\sin x$ und $\cos x$. Der Einheitskreis erweitert die Definition auf alle Winkel, auch auf stumpfe, überstumpfe und negative Winkel.

Achtung

Drei Fehler kommen in Klausuren immer wieder vor. Erstens: Der Taschenrechner steht im Gradmaß (DEG), obwohl im Bogenmaß gerechnet wird. Zweitens: Die Periode wird mit b statt mit $\frac{2\pi}{b}$ angegeben. Drittens: Bei $\sin(2x - \pi)$ wird die Verschiebung falsch abgelesen. Erst ausklammern: $\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, die Verschiebung beträgt also $\frac{\pi}{2}$ und nicht π. Außerdem liefert der Taschenrechner mit $\sin^{-1}$ nur **eine** Lösung; die zweite musst du selbst mit der Symmetrie bestimmen.

Wusstest du?

Das Wort Sinus hat eine lange Reise hinter sich: Indische Mathematiker sprachen von der „Bogensehne“, arabische Gelehrte übernahmen den Begriff als „dschiba“, und lateinische Übersetzer machten daraus „sinus“, was Bucht bedeutet. In Deutschland begegnet dir die Sinusfunktion täglich: Die Netzspannung der Steckdose schwankt mit 50 Schwingungen pro Sekunde zwischen etwa $+325$ V und -325 V, und daraus ergibt sich der bekannte Effektivwert von 230 V.

Häufige Fehler

- Taschenrechner im Gradmodus, obwohl im Bogenmaß gerechnet wird.
- Bei $\sin x = s$ nur eine Lösung angeben; es gibt in $[0; 2\pi]$ meist zwei.
- $(\cos x)' = \sin x$ schreiben: Das Vorzeichen ist negativ.

- Periode bei $\sin(bx)$ als $2\pi \cdot b$ berechnen; richtig ist $\frac{2\pi}{b}$.
- $\sin^2 x$ mit $\sin(x^2)$ verwechseln.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Bogenmaß: $180^\circ \mathrel{\widehat{=}} \pi$; Umrechnung $x = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$; Taschenrechner auf RAD.
- Einheitskreis: $P(\cos x \mid \sin x)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, Wertebereich jeweils $[-1;1]$.
- Sinus ist punktsymmetrisch zum Ursprung, Kosinus achsensymmetrisch zur y-Achse; Periode 2π.
- $f(x) = a\sin\big(b(x-c)\big) + d$: Amplitude $|a|$, Periode $\frac{2\pi}{|b|}$, Verschiebung c nach rechts, Mittellinie $y = d$.
- Aus Hoch- und Tiefpunkt: $d = \frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}$, $a = \frac{y_{\max}-y_{\min}}{2}$, $b = \frac{2\pi}{p}$.
- Gleichungen: $\sin x = k$ hat in $[0;2\pi]$ meist die Lösungen x_1 und $\pi - x_1$; bei $\cos x = k$ die Lösungen x_1 und $2\pi - x_1$.
- Ableitungen: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin(bx))' = b\cos(bx)$.
- Periodische Vorgänge (Gezeiten, Riesenrad, Tageslänge, Wechselstrom) mit Sinus oder Kosinus modellieren.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Zeichne bei Gleichungen immer kurz den Einheitskreis oder die Sinuskurve. Dann siehst du sofort, wie viele Lösungen es im Intervall gibt. Lerne außerdem die Tabelle der Spezialwerte auswendig, denn in Klausuren ohne Taschenrechner kommen genau diese Werte vor.

Zusammenfassung

Sinus und Kosinus sind periodische Funktionen mit Wertebereich $[-1;1]$. Parameter a, b, c, d verändern Amplitude, Periode und Lage. Die Ableitungen sind $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$. Mit dem Einheitskreis findest du Gleichungslösungen und erkennst Symmetrien. Damit kannst du Schwingungen, Gezeiten und Temperaturverläufe mathematisch beschreiben und sinnvoll interpretieren.

Weiteres Beispiel: Extrempunkte

Für $f(x) = \sin x$ im Intervall $[0;2\pi]$ gilt $f'(x) = \cos x = 0$ bei $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$. Wegen $f''(x) = -\sin x$ ist $f''(\frac{\pi}{2}) = -1$, also liegt bei $\left(\frac{\pi}{2} \mid 1\right)$ ein Hochpunkt vor, und $f''(\frac{3\pi}{2}) = 1 > 0$ liefert den Tiefpunkt $\left(\frac{3\pi}{2} \mid -1\right)$. Die Wendepunkte liegen bei den Nullstellen 0, π und 2π, denn dort ist $f'' = -\sin x = 0$.