Arbeitsblatt - Trigonometrische Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Grad- und Bogenmaß

Rechne die Winkel um. Gib exakte Werte als Vielfache von π an.

a) 60°, 135°, 210° ins Bogenmaß
b) $\frac{2\pi}{5}$ und $\frac{5\pi}{4}$ ins Gradmaß
c) Wie viel Grad entspricht 1 im Bogenmaß?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Werte am Einheitskreis

Bestimme die Werte exakt mit Hilfe des Einheitskreises und der Symmetrien. Begründe jeweils kurz.

a) $\sin\frac{5\pi}{6}$
b) $\cos\frac{4\pi}{3}$
c) $\sin\frac{7\pi}{4}$
d) $\cos\pi$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Eigenschaften ablesen

Gib für beide Funktionen Amplitude, Periode, Mittellinie und Wertebereich an.

a) $f(x) = 3\sin(2x) - 1$
b) $g(x) = 0{,}5\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Ableitungen

Bilde die erste Ableitung. Gib die verwendeten Regeln an.

a) $f(x) = 4\sin x$
b) $g(x) = \cos(3x)$
c) $h(x) = x^2 + 2\cos x$
d) $k(x) = \sin(\pi x)$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Trigonometrische Gleichungen

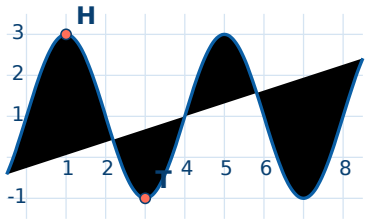
Löse die Gleichungen im Intervall $[0; 2\pi]$.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\cos x = 0$
c) $2\sin x + 1 = 0$
d) $\sin x = 0{,}3$ (Taschenrechner, auf drei Nachkommastellen)

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Parameter aus dem Graphen

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion $f(x) = a\sin(bx) + d$.



a) Lies Hoch- und Tiefpunkt ab.
b) Bestimme Mittellinie und Amplitude.
c) Bestimme die Periode und den Parameter b.
d) Gib die Funktionsgleichung an und prüfe sie an einem Punkt.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Verschiebungen erkennen

Gegeben sind $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ und $g(x) = \sin(2x - \pi)$.

a) Um wie viel ist der Graph von f gegenüber $\sin x$ verschoben?
b) Schreibe g in der Form $\sin\big(b(x - c)\big)$ und gib die Verschiebung an.
c) Bestimme die Nullstellen von g im Intervall $[0; \pi]$.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Tangenten an die Sinuskurve

Gegeben ist $f(x) = \sin x$.

a) Bestimme die Tangente bei $x_0 = \pi$.
b) Bestimme die Tangente bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
c) Unter welchem Winkel schneidet der Graph die x-Achse im Ursprung?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Gezeiten in Cuxhaven

Der Wasserstand am Pegel Cuxhaven wird durch $h(t) = 1{,}6\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}4}t\right) + 1{,}8$ beschrieben (t in Stunden nach dem Hochwasser um 0:00 Uhr, h in Metern).

a) Wie hoch steht das Wasser bei Hoch- und bei Niedrigwasser?
b) Wann ist das nächste Niedrigwasser?
c) Berechne den Wasserstand um 3:00 Uhr.
d) Wann erreicht der Wasserstand zum ersten Mal die Mittellinie?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das Riesenrad auf dem Hamburger Dom

Ein Riesenrad hat einen Durchmesser von 50 m, seine Achse liegt 28 m über dem Boden. Eine Umdrehung dauert 10 Minuten. Eine Gondel startet zur Zeit $t = 0$ am tiefsten Punkt. Ihre Höhe ist $h(t) = 28 - 25\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ (t in Minuten).

a) Wie hoch ist die Gondel höchstens, wie hoch mindestens?
b) Berechne die Höhe nach 2,5 Minuten.
c) Wann erreicht die Gondel zum ersten Mal 40 m Höhe?
d) Wie lange ist die Gondel pro Umdrehung höher als 40 m?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Tageslänge in Hamburg

Die Tageslänge in Hamburg (in Stunden) lässt sich näherungsweise durch $L(t) = 4{,}6\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) + 12{,}2$ beschreiben (t: Tag des Jahres, $t = 1$ ist der 1. Januar).

a) Wie lang ist der längste und der kürzeste Tag?
b) An welchem Tag ist der Tag am längsten? Gib das Datum an.
c) Wie lang ist der Tag am Tag $t = 80$? Welche Bedeutung hat dieser Tag?
d) Um wie viele Minuten wächst die Tageslänge um den Tag $t = 80$ pro Tag?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Wechselstrom aus der Steckdose

Die Netzspannung in Deutschland ist $U(t) = 325\sin(100\pi t)$ (U in Volt, t in Sekunden).

a) Gib die Scheitelspannung an.
b) Berechne Periode und Frequenz.
c) Berechne die Spannung zur Zeit $t = 0{,}0025$ s.
d) Wie schnell ändert sich die Spannung zur Zeit $t = 0$?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Temperaturverlauf an einem Sommertag

An einem Sommertag in Freiburg wird die Temperatur durch $T(t) = 6\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-9)\right) + 14$ beschrieben (t in Stunden nach Mitternacht, T in °C).

a) Bestimme Höchst- und Tiefsttemperatur und die Uhrzeiten.
b) Berechne die Temperatur um 12 Uhr.
c) Wann steigt die Temperatur am schnellsten? Wie schnell?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Das Federpendel im Physikraum

Ein Gewicht an einer Feder schwingt nach $s(t) = 5\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}8}t\right)$ (s in cm, t in s).

a) Gib Amplitude und Schwingungsdauer an.
b) Berechne die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$ und ihren Höchstwert.
c) Berechne die Auslenkung nach $0{,}1$ s.
d) Wann ist das Gewicht zum ersten Mal am tiefsten Punkt?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Hafeneinfahrt bei Niedrigwasser

Im Hafen von Husum wurde der Wasserstand gemessen (t in Stunden nach Niedrigwasser). Ein Frachter benötigt mindestens $3{,}25$ m Wassertiefe, um einzulaufen.

t in h	0	3,1	6,2	9,3	12,4
h in m	1,0	2,5	4,0	2,5	1,0

a) Bestimme Amplitude, Mittellinie und Periode.
b) Begründe, dass $h(t) = -1{,}5\cos\left(\frac{2\pi}{12{,}4}t\right) + 2{,}5$ die Messwerte beschreibt.
c) In welchem Zeitraum kann der Frachter einlaufen?
d) Wie lang ist dieses Zeitfenster?
e) Nenne zwei Gründe, warum das Modell in der Praxis nur näherungsweise gilt.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Windrad

Ein Windrad in Schleswig-Holstein hat eine Nabenhöhe von 100 m und Rotorblätter der Länge 60 m. Der Rotor dreht sich 15-mal pro Minute. Die Höhe einer Blattspitze ist $h(t) = 100 + 60\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ (t in Sekunden).

a) Wie hoch kommt die Blattspitze höchstens, wie tief mindestens?
b) Begründe die Periode 4 s.
c) Wie schnell bewegt sich die Blattspitze auf ihrer Kreisbahn? Gib das Ergebnis auch in km/h an.

d) Wie lange ist die Spitze pro Umdrehung höher als 130 m?
e) Bestimme die größte senkrechte Geschwindigkeit der Spitze mit der Ableitung.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Puls und Blutdruck

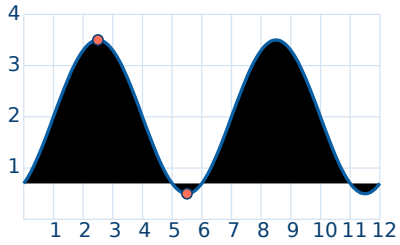
Der Blutdruck einer Schülerin in Ruhe wird modellhaft durch $p(t) = 100 + 20\sin(2{,}5\pi t)$ beschrieben (p in mmHg, t in Sekunden).

a) Gib den oberen und den unteren Blutdruckwert an.
b) Berechne die Periode und die Zahl der Herzschläge pro Minute.
c) Berechne $p(0{,}3)$.
d) Beim Laufen steigt der Puls auf 90 Schläge pro Minute. Wie ändert sich der Parameter b?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Funktionsgleichung aus einem Graphen

Die Abbildung zeigt eine Funktion der Form $f(x) = a\sin\big(b(x-c)\big) + d$. Ein Hochpunkt liegt bei $(2{,}5\,|\,3{,}5)$, der folgende Tiefpunkt bei $(5{,}5\,|\,0{,}5)$.



a) Bestimme a, d und die Periode.
b) Bestimme b und eine passende Verschiebung c.
c) Berechne $f'(1)$.
d) Ist die Funktionsgleichung eindeutig? Begründe.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Der trigonometrische Pythagoras

Am Einheitskreis gilt für jeden Winkel x der Satz $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

a) Begründe den Satz mit dem Satz des Pythagoras.
b) Es gilt $\sin x = 0{,}6$ und $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$. Bestimme $\cos x$ und $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
c) Bestimme x im Bogenmaß.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Sinus trifft Kosinus

Die Graphen von $\sin x$ und $\cos x$ schneiden sich im Intervall $[0; 2\pi]$ zweimal.

a) Bestimme die Schnittstellen und die Schnittpunkte.
b) Berechne an der ersten Schnittstelle die Steigungen beider Graphen.
c) Stehen die Graphen dort senkrecht aufeinander?
d) Berechne den Schnittwinkel der beiden Tangenten.