Lösungen - Trigonometrische Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) $60^\circ = \frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3}$; $135^\circ = \frac{135}{180}\pi = \frac{3\pi}{4}$; $210^\circ = \frac{210}{180}\pi = \frac{7\pi}{6}$.
b) $\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 72^\circ$; $\frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$.
c) $1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}30^\circ$.
Merke: Der volle Winkel 360° entspricht dem Umfang 2π des Einheitskreises, also gilt $180^\circ = \pi$. Vom Grad- ins Bogenmaß multipliziert man mit $\frac{\pi}{180^\circ}$, in die Gegenrichtung mit $\frac{180^\circ}{\pi}$. Der Winkel 1 im Bogenmaß gehört zu einem Kreisbogen, der genau so lang ist wie der Radius.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
b) $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.
c) $\sin\frac{7\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) Zum Winkel π gehört der Punkt $(-1\,|\,0)$, also $\cos\pi = -1$.
Merke: Man führt jeden Winkel auf einen Winkel im ersten Viertel zurück und bestimmt das Vorzeichen aus der Lage im Einheitskreis. Im zweiten Viertel ist der Sinus positiv und der Kosinus negativ, im dritten sind beide negativ, im vierten ist nur der Kosinus positiv. Die Grundwerte zu $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ sollte man auswendig kennen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Amplitude 3; Periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$; Mittellinie $y = -1$; Wertebereich $[-1-3;-1+3] = [-4;2]$.
b) Amplitude $0{,}5$; Periode $\frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$; Mittellinie $y = 2$; Wertebereich $[1{,}5;2{,}5]$.
Merke: Bei $a\sin(bx)+d$ ist $|a|$ die Amplitude, $\frac{2\pi}{b}$ die Periode und $y = d$ die Mittellinie. Der Wertebereich reicht von $d-|a|$ bis $d+|a|$. Ein großes b staucht die Kurve waagerecht, ein kleines b streckt sie.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Faktorregel: $f'(x) = 4\cos x$.
b) Mit $(\cos(bx))' = -b\sin(bx)$: $g'(x) = -3\sin(3x)$.
c) Summenregel: $h'(x) = 2x - 2\sin x$.
d) Mit $b = \pi$: $k'(x) = \pi\cos(\pi x)$.
Merke: $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$. Steht im Argument bx, so tritt nach der Kettenregel der Faktor b vor die Ableitung. Konstante Faktoren bleiben nach der Faktorregel erhalten, Summen werden gliedweise abgeleitet.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
b) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.
c) $\sin x = -\frac{1}{2}$: Der Sinus ist im dritten und vierten Viertel negativ; $x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.
d) $x_1 = \sin^{-1}(0{,}3) \approx 0{,}305$; $x_2 = \pi - x_1 \approx 2{,}837$.
Merke: Eine Gleichung $\sin x = c$ mit -1 hat in $[0; 2\pi]$ genau zwei Lösungen. Die zweite erhält man aus der ersten mit der Symmetrie $\sin(\pi - x) = \sin x$. Der Taschenrechner liefert nur eine Lösung, deshalb muss man die zweite immer selbst ergänzen.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Hochpunkt $H(1\,|\,3)$, Tiefpunkt $T(3\,|\,-1)$.
b) $d = \frac{3+(-1)}{2} = 1$; $a = \frac{3-(-1)}{2} = 2$.
c) Der Abstand von Hoch- zu Tiefpunkt ist eine halbe Periode: $p = 2 \cdot 2 = 4$; $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
d) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$. Probe: $f(1) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 3$ ✓.
Begründung: Die Mittellinie liegt genau in der Mitte zwischen größtem und kleinstem Funktionswert, die Amplitude ist der halbe Abstand. Zwischen einem Hochpunkt und dem nächsten Tiefpunkt liegt eine halbe Periode. Antwort: $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts.
b) $g(x) = \sin\left(2(x - \frac{\pi}{2})\right)$: Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts, Periode π.
c) $2x - \pi = k\pi \Rightarrow x = \frac{(k+1)\pi}{2}$; im Intervall: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.
Merke: In $\sin(bx - e)$ darf man die Verschiebung nicht direkt ablesen; man klammert erst b aus und erhält $\sin\left(b(x - c)\right)$ mit der Verschiebung $c = \frac{e}{b}$. Bei g ist sie $\frac{\pi}{2}$ und nicht π. Die Nullstellen liegen im Abstand einer halben Periode.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = \cos\pi = -1$; $t(x) = -(x - \pi) = -x + \pi$.
b) $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$: waagerechte Tangente $y = 1$.
c) $f'(0) = \cos 0 = 1 \Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.
Begründung: Die Tangentensteigung ist der Wert der Ableitung $\cos x$. Bei $x = \pi$ fällt die Sinuskurve mit Steigung -1, am Hochpunkt bei $\frac{\pi}{2}$ ist die Tangente waagerecht. Im Ursprung steigt der Graph mit Steigung 1, also unter 45°; dort schmiegt sich die Kurve an die Gerade $y = x$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Hochwasser $1{,}8 + 1{,}6 = 3{,}4$ m, Niedrigwasser $1{,}8 - 1{,}6 = 0{,}2$ m.
b) Nach einer halben Periode: $t = 6{,}2$ h, also um 6:12 Uhr.

c) $h(3) = 1{,}6\cos\left(\frac{6\pi}{12{,}4}\right) + 1{,}8 \approx 1{,}88$ m.
d) Nach einer Viertelperiode: $t = 3{,}1$ h, also um 3:06 Uhr.
Begründung: Der Kosinus beginnt im Hochpunkt, passend zum Hochwasser um 0:00 Uhr. Die Periode $12{,}4$ h ist die Zeit zwischen zwei Hochwassern. Antwort: Hochwasser $3{,}4$ m, Niedrigwasser $0{,}2$ m um 6:12 Uhr; um 3:06 Uhr steht das Wasser auf Mittelhöhe $1{,}8$ m.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Höchstens $28 + 25 = 53$ m, mindestens $28 - 25 = 3$ m.
b) $h(2{,}5) = 28 - 25\cos\frac{\pi}{2} = 28$ m (Höhe der Achse).
c) $28 - 25\cos(\frac{\pi}{5}t) = 40 \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{5}t) = -0{,}48 \Rightarrow t = \frac{5}{\pi}\cos^{-1}(-0{,}48) \approx 3{,}30$ min.
d) Wegen der Symmetrie ist die Gondel von t_1 bis $10 - t_1$ oberhalb: $10 - 2 \cdot 3{,}30 \approx 3{,}41$ min.
Begründung: Mit dem Minuszeichen vor dem Kosinus startet die Gondel im Tiefpunkt. Die Periode $\frac{2\pi}{\pi/5} = 10$ min passt zur Umlaufzeit. Antwort: Die Gondel ist zwischen 3 m und 53 m hoch und pro Umdrehung knapp dreieinhalb Minuten oberhalb von 40 m.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Längster Tag $12{,}2 + 4{,}6 = 16{,}8$ h, kürzester Tag $12{,}2 - 4{,}6 = 7{,}6$ h.
b) Maximum, wenn $\frac{2\pi}{365}(t - 80) = \frac{\pi}{2}$, also $t = 80 + \frac{365}{4} \approx 171$: der 20. Juni.
c) $L(80) = 12{,}2$ h: Tag und Nacht sind etwa gleich lang (Frühlingsanfang um den 21. März).
d) $L'(t) = 4{,}6 \cdot \frac{2\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$; $L'(80) \approx 0{,}0792$ h pro Tag, also etwa $4{,}8$ Minuten.
Begründung: Die Sinusfunktion erreicht ihr Maximum, wenn ihr Argument $\frac{\pi}{2}$ ist, und hat beim Argument 0 die größte Steigung. Deshalb ändert sich die Tageslänge zur Tagundnachtgleiche am schnellsten, um die Sonnenwenden dagegen kaum.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Die Scheitelspannung ist die Amplitude: 325 V.
b) $p = \frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02$ s; Frequenz $\frac{1}{0{,}02} = 50$ Hz.
c) $U(0{,}0025) = 325\sin\frac{\pi}{4} \approx 229{,}8$ V.
d) $U'(t) = 325 \cdot 100\pi\cos(100\pi t)$; $U'(0) \approx 102\,102$ V pro Sekunde.
Begründung: Die Scheitelspannung ist der größte Wert, also die Amplitude. Aus der Periode $0{,}02$ s folgt die bekannte Netzfrequenz von 50 Hertz. Am Nulldurchgang ändert sich die Spannung am schnellsten, nämlich um gut $100\,000$ Volt pro Sekunde.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Maximum 20 °C, wenn $\frac{\pi}{12}(t - 9) = \frac{\pi}{2}$, also um 15 Uhr; Minimum 8 °C um 3 Uhr.
b) $T(12) = 6\sin\frac{\pi}{4} + 14 \approx 18{,}2$ °C.
c) $T'(t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 9)\right)$ ist bei $t = 9$ am größten: $T'(9) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ °C pro Stunde.
Begründung: Der Sinus erreicht sein Maximum beim Argument $\frac{\pi}{2}$ und sein Minimum

bei $-\frac{\pi}{2}$. Die Periode $\frac{2\pi}{\pi/12} = 24$ h entspricht einem Tag. Am schnellsten steigt die Temperatur beim Durchgang durch die Mittellinie um 9 Uhr, dort ist die Ableitung am größten.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Amplitude 5 cm, Schwingungsdauer $0{,}8$ s.
b) $v(t) = 5 \cdot \frac{2\pi}{0{,}8}\cos\left(\frac{2\pi}{0{,}8}t\right) = 12{,}5\pi\cos(2{,}5\pi t)$; Höchstwert $12{,}5\pi \approx 39{,}3$ cm/s.
c) $s(0{,}1) = 5\sin\frac{\pi}{4} \approx 3{,}54$ cm.
d) $s = -5$, wenn $2{,}5\pi t = \frac{3\pi}{2}$, also $t = 0{,}6$ s.
Begründung: Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Auslenkung; sie ist am größten beim Durchgang durch die Ruhelage, wo der Kosinus den Wert 1 hat. Am tiefsten Punkt $s = -5$ ist die Geschwindigkeit null, dort kehrt das Gewicht um. Das geschieht nach drei Vierteln der Schwingungsdauer, also nach $0{,}6$ s.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Amplitude $\frac{4-1}{2} = 1{,}5$ m, Mittellinie $y = 2{,}5$, Periode $12{,}4$ h.
b) Start im Tiefpunkt: negativer Kosinus. Probe: $h(0) = -1{,}5 + 2{,}5 = 1$, $h(6{,}2) = 1{,}5 + 2{,}5 = 4$, $h(3{,}1) = 2{,}5$ ✓.
c) $h(t) \geq 3{,}25 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{12{,}4}t\right) \leq -0{,}5 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{12{,}4}t \leq \frac{4\pi}{3}$, also $4{,}13 \leq t \leq 8{,}27$.
d) $\frac{12{,}4}{3} \approx 4{,}13$ h, also etwa 4 Stunden und 8 Minuten.
e) Wind, Luftdruck und Springtiden bei Voll- und Neumond verändern Höhe und Zeitpunkt der Gezeiten; außerdem ist die Gezeitenkurve nicht exakt sinusförmig.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Höchstens 160 m, mindestens 40 m.
b) 15 Umdrehungen in 60 s ergeben 4 s pro Umdrehung; $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ ✓.
c) $v = \frac{2\pi \cdot 60}{4} \approx 94{,}2$ m/s ≈ 339 km/h.
d) $\sin(\frac{\pi}{2}t) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}t \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{5}{3}$: also $1{,}33$ s.
e) $h'(t) = 30\pi\cos(\frac{\pi}{2}t)$; größter Wert $30\pi \approx 94{,}2$ m/s, genauso groß wie die Bahngeschwindigkeit.
Begründung: Die senkrechte Geschwindigkeit ist die Ableitung der Höhe. Sie ist am größten, wenn die Blattspitze auf Nabenhöhe ist und sich gerade senkrecht bewegt. Dann ist sie genauso groß wie die Bahngeschwindigkeit, denn die ganze Bewegung zeigt in diesem Moment nach oben oder unten.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Oben 120 mmHg, unten 80 mmHg.
b) $p = \frac{2\pi}{2{,}5\pi} = 0{,}8$ s; $\frac{60}{0{,}8} = 75$ Schläge pro Minute.
c) $p(0{,}3) = 100 + 20\sin(0{,}75\pi) \approx 114{,}1$ mmHg.
d) Periode $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ s, also $b = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$.

Begründung: Der Blutdruck schwankt um die Mittellinie 100 mmHg mit der Amplitude 20. Die Periode entspricht der Dauer eines Herzschlags. Bei höherem Puls wird die Periode kürzer, deshalb muss b größer werden: von $2{,}5\pi$ auf 3π.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $d = \frac{3{,}5+0{,}5}{2} = 2$, $a = \frac{3{,}5-0{,}5}{2} = 1{,}5$; halbe Periode $5{,}5 - 2{,}5 = 3$, also $p = 6$.
b) $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Der steigende Schnitt mit der Mittellinie liegt eine Viertelperiode vor dem Hochpunkt: $c = 2{,}5 - 1{,}5 = 1$. $f(x) = 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right) + 2$.
c) $f'(x) = 1{,}5 \cdot \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right)$; $f'(1) = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$.
d) Nein: c kann um Vielfache von 6 verschoben werden (zum Beispiel $c = 7$), und man kann die Funktion auch mit dem Kosinus schreiben: $f(x) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3}(x-2{,}5)\right) + 2$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Der Punkt $P(\cos x \mid \sin x)$ hat vom Ursprung den Abstand 1. Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $|\cos x|$ und $|\sin x|$ gilt nach Pythagoras $\cos^2 x + \sin^2 x = 1^2$.
b) $\cos^2 x = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$; im zweiten Viertel ist der Kosinus negativ: $\cos x = -0{,}8$; $\tan x = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -0{,}75$.
c) $x = \pi - \sin^{-1}(0{,}6) \approx 2{,}498$.
Merke: Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kann man den einen Wert aus dem anderen berechnen. Das Vorzeichen bestimmt man aus dem Viertel, in dem der Winkel liegt; im zweiten Viertel ist der Kosinus negativ. Probe: $0{,}6^2 + (-0{,}8)^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; Punkte $\left(\frac{\pi}{4} \mid \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $\left(\frac{5\pi}{4} \mid -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
b) $(\sin x)' = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(\cos x)' = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
c) Das Produkt der Steigungen ist $-\frac{1}{2} \neq -1$: nicht senkrecht.
d) Steigungswinkel $\pm\arctan\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 35{,}26°$; Schnittwinkel $\approx 70{,}53°$.
Begründung: Zwei Graphen schneiden sich unter einem Winkel, der aus den Steigungswinkeln ihrer Tangenten im Schnittpunkt folgt. Senkrecht wären sie nur, wenn das Produkt der Steigungen -1 wäre. Hier ist der Winkel zwischen den Tangenten etwa $70{,}5°$.