# Lösungen zur Klassenarbeit - Tangenten und Normalen

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

## Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Für die Tangente braucht man Berührpunkt und Steigung. Berührpunkt: $f(1) = 1 - 3 = -2$, also $P(1|-2)$. Ableitung $f'(x) = 2x - 3$, Steigung $f'(1) = -1$ (1 P.). Punktsteigungsform $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: $t(x) = -1 \cdot (x - 1) - 2 = -x - 1$ (1 P.).
b) Die Normale steht im Berührpunkt senkrecht auf der Tangente. Für senkrechte Geraden gilt $m_t \cdot m_n = -1$, also $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-1} = 1$ (1 P.). Normale durch $P$: $n(x) = 1 \cdot (x - 1) - 2 = x - 3$ (1 P.). Probe: $t(1) = n(1) = -2$, beide Geraden gehen durch $P$, und $(-1) \cdot 1 = -1$ bestätigt die Orthogonalität. Antwort: Tangente $y = -x - 1$, Normale $y = x - 3$.

## Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Parallele Geraden haben dieselbe Steigung, die Tangente muss also die Steigung $3$ haben. Mit $f'(x) = x^2 - 1$ gilt $x^2 - 1 = 3$, also $x^2 = 4$ (1 P.). Lösungen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ (1 P.). Es gibt zwei solche Stellen, weil $f'$ eine nach oben geöffnete Parabel ist und den Wert $3$ zweimal annimmt.
b) Berührpunkte: $f(2) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ und $f(-2) = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3}$. Tangente bei $x = 2$: $t_1(x) = 3(x - 2) + \frac{2}{3} = 3x - 6 + \frac{2}{3} = 3x - \frac{16}{3}$. Tangente bei $x = -2$: $t_2(x) = 3(x + 2) - \frac{2}{3} = 3x + \frac{16}{3}$ (2 P.). Die beiden Tangenten liegen punktsymmetrisch zum Ursprung, passend zur Punktsymmetrie von $f$. Antwort: $y = 3x - \frac{16}{3}$ und $y = 3x + \frac{16}{3}$.

## Lösung zu Aufgabe 3 (3 BE/Punkte)

a) Der Steigungswinkel $\alpha$ einer Geraden mit Steigung $m$ erfüllt $\tan\alpha = m$. Ableitung $f'(x) = x - 1$, Steigung an der Stelle $3$: $f'(3) = 2$ (1 P.). Damit $\alpha = \arctan 2 \approx 63{,}4^\circ$ (1 P.). Der Taschenrechner muss im Gradmodus stehen; im Bogenmaß erhielte man $1{,}107$.
b) Ein Winkel von $45^\circ$ gehört zur Steigung $\tan 45^\circ = 1$. Gleichung: $x - 1 = 1$, also $x = 2$ (1 P.). Probe: $f'(2) = 1$. Der zugehörige Kurvenpunkt ist $(2|f(2)) = (2|0)$; dort ist die Tangente die Winkelhalbierende verschoben, $y = x - 2$. Bei $x = 1$ ist der Steigungswinkel übrigens $0^\circ$, dort liegt der Scheitel der Parabel. Antwort: $\alpha \approx 63{,}4^\circ$ bei $x_0 = 3$; $45^\circ$ an der Stelle $x = 2$.

## Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Der Berührpunkt ist unbekannt und heißt $B(u|u^2)$. Die Steigung dort ist $f'(u) = 2u$. Tangente: $t(x) = 2u(x - u) + u^2 = 2ux - u^2$ (1 P.). Sie soll durch $Q(1|-3)$ gehen, also

$t(1) = -3$: $2u - u^2 = -3$ (1 P.). Der Punkt $Q$ liegt unterhalb der Parabel, deshalb sind zwei Tangenten zu erwarten.
b) Umstellen: $u^2 - 2u - 3 = 0$. pq-Formel oder Faktorisieren: $(u-3)(u+1) = 0$, also $u = 3$ oder $u = -1$ (1 P.).
c) Für $u = 3$: $t_1(x) = 6x - 9$, Berührpunkt $(3|9)$. Für $u = -1$: $t_2(x) = -2x - 1$, Berührpunkt $(-1|1)$ (1 P.). Probe mit $Q$: $t_1(1) = 6 - 9 = -3$ und $t_2(1) = -2 - 1 = -3$; beide Tangenten gehen durch $Q$ (1 P.). Antwort: $y = 6x - 9$ und $y = -2x - 1$.

## Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Die Rampe endet bei $x = 4$: $f(4) = 0{,}125 \cdot 16 = 2$. Sie ist am Ende $2$ m hoch (1 P.).
b) Ableitung $f'(x) = 0{,}25x$, am Ende $f'(4) = 1$. Eine Steigung von $1$ entspricht $100\,\%$; der Neigungswinkel ist $\arctan 1 = 45^\circ$ (1 P.). Am Anfang bei $x = 0$ ist die Rampe waagerecht, sie wird zum Ende hin immer steiler.
c) Tangente in $E(4|2)$: $t(x) = 1 \cdot (x - 4) + 2 = x - 2$ (1 P.). $t(5) = 3$ (1 P.). Deutung: Würde der Skater ohne Schwerkraft geradlinig in Absprungrichtung weiterfliegen, wäre er $1$ m hinter der Kante $3$ m hoch. Tatsächlich zieht ihn die Schwerkraft nach unten, die Flugbahn ist eine Parabel unterhalb dieser Tangente. Antwort: $2$ m Höhe, Steigung $1$ bzw. $45^\circ$, Tangente $y = x - 2$ mit $t(5) = 3$.