Lernzettel - Tangenten und Normalen

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Die Kurve auf der Landstraße

Auf einer glatten Landstraße im Winter rutscht ein Auto in einer Kurve weg. Es fährt dann nicht weiter auf der Kurve, sondern geradeaus in die Richtung, in die es im letzten Moment gefahren ist. Diese Gerade, die die Kurve in einem Punkt nur berührt und dort dieselbe Richtung hat, heißt **Tangente**. Die Gerade, die im selben Punkt senkrecht auf der Tangente steht, heißt **Normale**. In diesem Kapitel stellst du Tangenten- und Normalengleichungen mit Hilfe der Ableitung auf, suchst Punkte mit vorgegebener Steigung, legst Tangenten von einem äußeren Punkt an einen Graphen und berechnest Steigungswinkel, etwa an Rampen, Rutschen und Brücken.

Tangente und Normale

Die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ ist die Gerade, die den Graphen in P berührt und dieselbe Steigung hat wie der Graph. Ihre Steigung ist die Ableitung $m_t = f'(x_0)$. Die **Normale** ist die Gerade durch P, die senkrecht auf der Tangente steht.

Tangentengleichung

Mit der Punkt-Steigungs-Form einer Geraden erhältst du

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Vorgehen in drei Schritten: 1. $f(x_0)$ berechnen, 2. $f'(x)$ bestimmen und $f'(x_0)$ berechnen, 3. in die Formel einsetzen und vereinfachen.
Beispiel 1. Tangente an $f(x) = x^2$ in $P(1 \mid 1)$: $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$. Dann $t(x) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

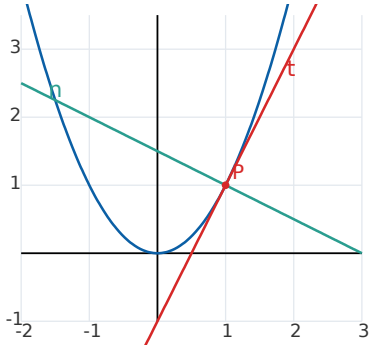
Beispiel 2. Tangente an $f(x) = x^3 - 3x$ bei $x_0 = 2$: $f(2) = 8 - 6 = 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(2) = 9$. Also $t(x) = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16$.

Normalengleichung

Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 stehen senkrecht aufeinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt. Die Normale hat deshalb die Steigung

$$m_n = -\frac{1}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

Ist $f'(x_0) = 0$, ist die Tangente waagerecht und die Normale senkrecht, also die Gerade $x = x_0$. Für die Normale gilt $n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.
Beispiel 3. Normale an $f(x) = x^2$ in $P(1 \mid 1)$: $m_n = -\frac{1}{2}$, also $n(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.



Die Abbildung zeigt die Parabel $f(x) = x^2$ mit der Tangente $t(x) = 2x - 1$ (rot) und der Normale $n(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (grün) im Punkt $P(1\,|\,1)$.

Anschaulich bedeutet die Normale die Richtung, in die ein Ball von der Kurve wegrollen würde, wenn man ihn senkrecht von der Tangente abstößt. In der Technik und in der Optik spielt sie eine große Rolle, etwa beim Reflexionsgesetz an gekrümmten Spiegeln: Der Einfallswinkel wird immer zur Normalen gemessen. In der Schule brauchst du die Normale vor allem als Übung im Umgang mit Steigungen und Senkrechtkriterium.

Berührpunkte bei gegebener Steigung

Oft ist die Steigung vorgegeben und der Berührpunkt gesucht, zum Beispiel wenn die Tangente parallel zu einer Geraden $y = mx + c$ sein soll. Dann löst du $f'(x) = m$ und berechnest dazu $f(x)$.

Beispiel 4. Für $f(x) = x^2$ soll die Tangente parallel zu $y = 4x$ verlaufen: $2x = 4 \Rightarrow x = 2$, Berührpunkt $P(2\,|\,4)$. Tangente: $t(x) = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$.

Tangenten von einem Punkt außerhalb

Liegt ein Punkt Q nicht auf dem Graphen, geht man vom unbekannten Berührpunkt x_0 aus. Die Tangente $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ muss durch Q laufen. Das Einsetzen der Koordinaten von Q ergibt eine Gleichung für x_0.

Beispiel 5. Von $Q(0\,|\,-4)$ werden Tangenten an $f(x) = x^2$ gelegt. Für $t(x) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$ gilt $t(0) = -2x_0^2 + x_0^2 = -x_0^2$. Die Bedingung $-x_0^2 = -4$ ergibt $x_0 = \pm 2$. Die Tangenten sind $y = 4x - 4$ und $y = -4x - 4$.

Steigungswinkel

Der Steigungswinkel α einer Geraden mit der Steigung m gegen die x-Achse erfüllt $\tan\alpha = m$. Für $m = 2$ ist $\alpha = \arctan 2 \approx 63{,}4°$. In Sachaufgaben wie dem Gefälle einer Straße oder dem Profil eines Hanges gibt man die Steigung oft in Prozent an: $m = 0{,}4$ entspricht 40 %.

Typische Aufgabenarten in der Klausur

In Klausuren kommen vier Aufgabentypen besonders häufig vor. Erstens: Tangente oder Normale in einem gegebenen Punkt. Zweitens: Berührpunkt zu einer vorgegebenen Steigung oder zu einer vorgegebenen Parallelen. Drittens: Tangente von einem Punkt

außerhalb des Graphen. Viertens: Schnittpunkt der Tangente mit den Koordinatenachsen oder mit einer anderen Geraden. Bei allen vier Typen brauchst du dieselben Bausteine: $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und die Punkt-Steigungs-Form. Schreibe deshalb jeden Schritt einzeln auf. So findest du Fehler leichter und bekommst auch dann Teilpunkte, wenn am Ende ein Rechenfehler passiert.

Beispiel 6. Bestimme den Schnittpunkt der Tangente an $f(x) = x^2 - 1$ bei $x_0 = 2$ mit der y-Achse. Es gilt $f(2) = 3$ und $f'(2) = 4$, also $t(x) = 4(x-2) + 3 = 4x - 5$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0 \mid -5)$, die Nullstelle der Tangente liegt bei $x = \frac{5}{4}$.

Definition: Tangente, Normale und Berührpunkt

Die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ ist die Gerade durch P mit der Steigung $m_t = f'(x_0)$. Der Punkt P heißt **Berührpunkt**. Die **Normale** ist die Gerade durch P, die senkrecht auf der Tangente steht. Eine Tangente kann den Graphen an einer anderen Stelle durchaus noch einmal schneiden; entscheidend ist nur das Verhalten in der Nähe von P.

Satz: Senkrechte Geraden

Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 (beide ungleich null) stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt, also $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Beispiel: Die Geraden $y = 2x + 1$ und $y = -\frac{1}{2}x + 4$ sind orthogonal, denn $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Parallele Geraden haben dagegen dieselbe Steigung.

So gehst du vor: Tangente und Normale aufstellen

1. Berechne den Funktionswert $y_0 = f(x_0)$, damit du den Berührpunkt kennst.
2. Bilde die Ableitung $f'(x)$ und berechne die Tangentensteigung $m_t = f'(x_0)$.
3. Setze in die Punkt-Steigungs-Form $t(x) = m_t\,(x - x_0) + y_0$ ein und vereinfache zur Form $t(x) = mx + b$.
4. Für die Normale nimmst du die Steigung $m_n = -\frac{1}{m_t}$ und denselben Punkt.
5. Mache die Probe: Die Gerade muss durch den Berührpunkt gehen.

Beispiel 5

Bestimme Tangente und Normale an $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Funktionswert: $f(4) = 8 - 8 + 1 = 1$, also $P(4 \mid 1)$. Ableitung: $f'(x) = x - 2$, $f'(4) = 2$. Tangente: $t(x) = 2(x-4) + 1 = 2x - 7$. Normale: $m_n = -\frac{1}{2}$, $n(x) = -\frac{1}{2}(x-4) + 1 = -\frac{1}{2}x + 3$. Probe: $t(4) = 1$ und $n(4) = 1$.

Beide Geraden gehen durch P, und $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$ bestätigt die Orthogonalität.

Beispiel 6

Lege von $Q(0 \mid -4)$ aus die Tangenten an die Normalparabel $f(x) = x^2$.

Der Berührpunkt $B(u \mid u^2)$ ist unbekannt. Die Tangente in B lautet $t(x) = 2u(x-u) + u^2 = 2ux - u^2$. Sie soll durch Q gehen: $t(0) = -u^2 = -4$, also $u = 2$ oder $u = -2$. Es gibt zwei Tangenten: $t_1(x) = 4x - 4$ mit Berührpunkt $B_1(2 \mid 4)$ und $t_2(x) = -4x - 4$ mit $B_2(-2 \mid 4)$. Sie liegen symmetrisch zur y-Achse, wie die Parabel selbst.

Beispiel 7

Unter welchem Winkel schneidet der Graph von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$ die Horizontale?

Die Steigung ist $f'(1) = 3$. Für den Steigungswinkel gilt $\tan\alpha = m$, also $\alpha = \arctan(3) \approx 71{,}6°$. Ist die Steigung negativ, erhält man einen negativen Winkel: Das bedeutet, dass der Graph dort fällt.

Beispiel 8

Eine Straße verläuft im Koordinatensystem (Einheit 100 m) entlang $f(x) = 0{,}5x^2$. Ein Auto rutscht bei $P(1 \mid 0{,}5)$ geradeaus weiter. Trifft es die Scheune bei $S(3 \mid 2{,}5)$?

Die Steigung in P ist $f'(1) = 1$. Das Auto bewegt sich auf der Tangente $t(x) = 1 \cdot (x-1) + 0{,}5 = x - 0{,}5$. Es gilt $t(3) = 2{,}5$: Der Punkt S liegt auf der Tangente, das Auto würde also auf die Scheune zufahren, wenn es nicht vorher bremst.

Hinweis: Berührung zweier Graphen

Zwei Graphen f und g **berühren** sich an der Stelle x_0, wenn sie dort denselben Funktionswert und dieselbe Steigung haben: $f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x_0) = g'(x_0)$. Sie haben dann in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente. Beispiel: $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x - 2$ berühren sich bei $x_0 = 1$, denn $f(1) = g(1) = 1$ und $f'(1) = g'(1) = 2$. Die gemeinsame Tangente ist $y = 2x - 1$.

Merke: Steigungswinkel und Schnittwinkel

Der Steigungswinkel α einer Geraden mit der Steigung m erfüllt $\tan\alpha = m$. Der Winkel, unter dem ein Graph die x-Achse schneidet, ist der Steigungswinkel der Tangente an der Nullstelle. Eine Steigung von $100\,\%$ entspricht $m = 1$ und damit einem Winkel von $45°$, nicht von $90°$. Verkehrsschilder in Deutschland geben die Steigung einer Straße in Prozent an.

Beispiel 9

In welchem Punkt des Graphen von $f(x) = x^2$ verläuft die Normale parallel zur Geraden $y = -\frac{1}{4}x$?

Die Normale soll die Steigung $-\frac{1}{4}$ haben. Dann muss die Tangente die Steigung 4 besitzen, denn $4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$. Aus $f'(x) = 2x = 4$ folgt $x = 2$ und damit der Punkt $P(2 \mid 4)$. Die Normale lautet $n(x) = -\frac{1}{4}(x - 2) + 4 = -\frac{1}{4}x + 4{,}5$. Sie ist tatsächlich parallel zur gegebenen Geraden, aber nicht mit ihr identisch.

Achtung

Ein häufiger Fehler ist es, in der Punkt-Steigungs-Form für y_0 den Wert $f'(x_0)$ statt $f(x_0)$ einzusetzen. Ebenso falsch ist es, die allgemeine Ableitung $f'(x)$ als Steigung in die Tangente zu schreiben: Die Tangente ist eine Gerade, ihre Steigung ist eine feste Zahl. Bei der Normale wird der Kehrwert mit umgekehrtem Vorzeichen gebildet, nicht nur das Vorzeichen geändert.

Wusstest du?

Das Tangentenproblem war im 17. Jahrhundert einer der Ausgangspunkte der Differentialrechnung. Pierre de Fermat bestimmte Tangenten an Kurven, und Gottfried Wilhelm Leibniz aus Leipzig veröffentlichte 1684 eine allgemeine Methode, Tangenten mit Hilfe von Differenzen zu berechnen. Seine Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ wird bis heute verwendet. Auch die Optik nutzt Normalen: Beim Reflexionsgesetz werden Einfalls- und Ausfallswinkel immer zur Normalen gemessen.

Häufige Fehler

- Für $f'(x_0)$ den Funktionswert $f(x_0)$ einsetzen oder umgekehrt.
- Bei der Normale das Vorzeichen vergessen: $m_n = -\frac{1}{m_t}$, nicht $\frac{1}{m_t}$ und nicht $-m_t$.
- Bei der Punkt-Steigungs-Form x_0 mit falschem Vorzeichen einsetzen: $x - x_0$, nicht $x + x_0$.
- Bei Tangenten von einem äußeren Punkt den Berührpunkt mit dem Punkt Q verwechseln.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Tangente in $P(x_0 \mid f(x_0))$: $t(x) = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$.
- Normale: Steigung $m_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$; bei $f'(x_0) = 0$ ist die Normale die senkrechte Gerade $x = x_0$.
- Senkrecht: $m_1 \cdot m_2 = -1$; parallel: $m_1 = m_2$.
- Gegebene Steigung m: Gleichung $f'(x) = m$ lösen und den Berührpunkt mit f berechnen.
- Tangente von einem äußeren Punkt Q: Tangente in $B(u \mid f(u))$ ansetzen und $t(x_Q) = y_Q$ nach u lösen.
- Steigungswinkel: $\tan\alpha = m$; $100\,\%$ Steigung entspricht 45°.
- Zwei Graphen berühren sich, wenn Funktionswerte und Ableitungen übereinstimmen.
- Probe immer mit $t(x_0) = f(x_0)$.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Prüfe jede Tangentengleichung mit einer Probe. Die Tangente muss durch den Berührpunkt P verlaufen: $t(x_0) = f(x_0)$. Zusätzlich kannst du $f(x)$ und $t(x)$ gleichsetzen. Bei einer Tangente ergibt sich an x_0 eine doppelte Lösung, weil der Graph die Gerade nur berührt.

Zusammenfassung

Tangente: $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Normale: Steigung $-\frac{1}{f'(x_0)}$. Bei vorgegebener Steigung löst du $f'(x) = m$ und erhältst den Berührpunkt. Mit einer Skizze erkennst du schnell, ob dein Ergebnis plausibel ist, und die Probe über $t(x_0) = f(x_0)$ schützt vor Vorzeichenfehlern.

Warum die Tangente die beste lineare Näherung ist

In der Nähe des Berührpunkts liegt der Graph von f fast auf der Tangente. Für kleine h gilt $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$. Mit dieser Näherung kannst du Funktionswerte schätzen, ohne sie genau auszurechnen. Zum Beispiel ist für $f(x) = x^2$ und $x_0 = 3$ der Wert von $3{,}1^2$ etwa $9 + 6 \cdot 0{,}1 = 9{,}6$. Der exakte Wert ist $9{,}61$. Die Abweichung ist klein, denn $h = 0{,}1$ ist klein. Je weiter du dich vom Berührpunkt entfernst, desto größer wird der Fehler.