Arbeitsblatt - Tangenten und Normalen

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Tangentengleichungen aufstellen

Bestimme jeweils die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0. Gib zuerst den Berührpunkt an.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$
b) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Normalengleichungen aufstellen

Bestimme die Gleichung der Normale an den Graphen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$
b) $f(x) = x^3 - 2x$, $x_0 = 1$
c) $f(x) = x^2 - 4x$, $x_0 = 2$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Die Punkt-Steigungs-Form Schritt für Schritt

Gegeben ist $f(x) = 2x^2 - 3x$. Gesucht ist die Tangente an der Stelle $x_0 = 2$.

a) Berechne $f(2)$.
b) Bestimme $f'(x)$ und $f'(2)$.
c) Stelle die Tangentengleichung auf.
d) Führe die Probe durch und gib den Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse an.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Berührpunkte bei gegebener Steigung

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x$.

a) An welchen Stellen hat der Graph die Steigung 9?
b) Gib die Berührpunkte und die zugehörigen Tangenten an.
c) Wo hat der Graph waagerechte Tangenten?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Steigungswinkel berechnen

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Rechne mit dem Taschenrechner im Gradmaß (DEG).

a) Berechne den Steigungswinkel an der Stelle $x_0 = 1$.
b) Berechne den Steigungswinkel bei $x_0 = \sqrt{3}$.
c) An welcher Stelle beträgt der Steigungswinkel 30°?
d) Welchen Winkel hat die Tangente bei $x_0 = -1$?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Parallele und senkrechte Tangenten

Gegeben ist $f(x) = x^2 - 2x$.

a) Bestimme die Tangente, die parallel zur Geraden $y = 4x + 1$ verläuft.
b) Bestimme die Tangente, die senkrecht auf der Geraden $y = -\frac{1}{2}x$ steht.
c) Zeige, dass sich beide Tangenten schneiden, und berechne den Schnittpunkt.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Tangenten durch den Ursprung

Gegeben ist $f(x) = x^2 + 1$. Vom Ursprung $O(0\,|\,0)$ aus sollen Tangenten an den Graphen gelegt werden.

a) Stelle die Tangente im allgemeinen Berührpunkt $B(u\,|\,u^2 + 1)$ auf.
b) Setze O ein und bestimme u.
c) Gib die Tangenten und Berührpunkte an.
d) Warum gibt es vom Punkt $(0\,|\,2)$ aus keine Tangente?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Die BMX-Rampe

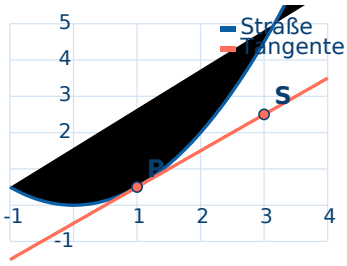
Das Profil einer BMX-Rampe im Jugendpark wird für $0 \le x \le 6$ durch $f(x) = 0{,}05x^2$ beschrieben (alle Angaben in Metern). Am Ende der Rampe hebt der Fahrer ab und bewegt sich zunächst in Richtung der Tangente.

a) Wie hoch ist die Kante der Rampe?
b) Berechne die Steigung an der Kante.
c) Unter welchem Winkel hebt der Fahrer ab?
d) Stelle die Tangente an der Kante auf. In welcher Entfernung würde sie (ohne Schwerkraft) eine Höhe von 3 m erreichen?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Glatteis auf der Landstraße

Eine Landstraße verläuft in einem Koordinatensystem (Einheit 100 m) entlang $f(x) = 0{,}5x^2$ für $-2 \le x \le 2$. Im Punkt $P(1 \mid 0{,}5)$ kommt ein Auto ins Rutschen und fährt geradeaus weiter.



a) Stelle die Gleichung der Tangente in P auf.
b) Liegt die Scheune $S(3 \mid 2{,}5)$ auf dieser Geraden?
c) Wo schneidet die Tangente die x-Achse?
d) Stelle die Normale in P auf und gib an, wo sie die y-Achse schneidet.

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Der Brückenbogen

Der Bogen einer Fußgängerbrücke über die Spree hat die Form $f(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}8x$ für $0 \le x \le 40$ (in Metern).

a) Berechne die Steigung des Bogens am linken Fußpunkt.
b) Unter welchem Winkel steigt der Bogen dort an?
c) Stelle die Tangente im linken Fußpunkt auf.
d) An welcher Stelle hat der Bogen die Steigung $0{,}4$? Berechne die Höhe dort.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Parabolspiegel

Der Querschnitt eines Solarkocher-Spiegels ist die Parabel $f(x) = 0{,}25x^2$ (in dm). Senkrecht einfallendes Sonnenlicht trifft den Spiegel im Punkt $P(2 \mid 1)$. Nach dem Reflexionsgesetz wird der Winkel zur Normalen gemessen.

a) Stelle die Tangente in P auf.
b) Stelle die Normale in P auf.
c) Wo schneidet die Normale die y-Achse?
d) Wie groß ist der Winkel zwischen dem senkrechten Lichtstrahl und der Normalen?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Wanderweg am Hügel

Das Profil eines Hügels im Sauerland wird für $0 \le x \le 8$ durch $h(x) = -0{,}05x^3 + 0{,}6x^2$ beschrieben (x in km, h in 100 m).

a) Berechne $h'(x)$ und die Steigung bei $x = 2$.

b) Stelle die Tangente bei $x = 2$ auf.
c) An welcher Stelle ist der Hang am steilsten? Wie groß ist die Steigung dort?
d) Stelle die Tangente in diesem Punkt auf.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Die Wasserrutsche

Im Freibad hat eine Rutsche für $0 \le x \le 6$ das Profil $f(x) = 0{,}1(x-6)^2$ (in Metern). Rechne Winkel im Gradmaß.

a) Wie hoch beginnt die Rutsche?
b) Wie groß ist der Neigungswinkel am Start?
c) An welcher Stelle beträgt das Gefälle genau 30°?
d) Stelle die Tangente bei $x = 3$ auf.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Zwei Graphen berühren sich

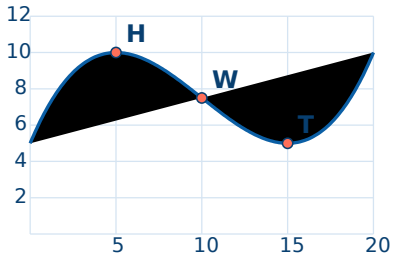
Gegeben sind $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.

a) Zeige, dass $f(1) = g(1)$ und $f'(1) = g'(1)$ gilt.
b) Gib die gemeinsame Tangente an.
c) Für welches c berührt die Gerade $y = 2x + c$ die Parabel f?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Die Achterbahn im Freizeitpark

Ein Abschnitt einer Achterbahn wird für $0 \le x \le 20$ durch $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}3x^2 + 2{,}25x + 5$ beschrieben (x und $f(x)$ in Metern). Für die Sicherheitsprüfung werden Steigungen und Neigungswinkel benötigt.



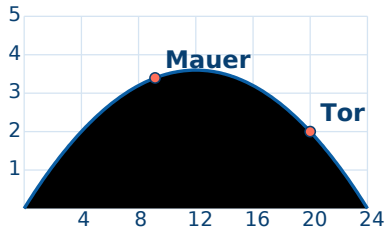
a) Berechne die Höhen für $x = 0, 5, 10, 15, 20$ und trage sie in eine Tabelle ein.
b) An welchen Stellen fährt der Wagen waagerecht?
c) Bestimme die Stelle, an der der Wagen bergab am steilsten fährt, und den zugehörigen Gefällewinkel.
d) Stelle die Tangente in diesem Punkt auf.
e) Begründe, an welchen Stellen des Abschnitts die Bahn insgesamt am steilsten ist.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Der Freistoß

Bei einem Freistoß aus 20 m Entfernung zum Tor wird die Flugbahn des Balls durch $h(x) = -0{,}025x^2 + 0{,}6x$ beschrieben (x waagerechte Entfernung, h Höhe, beides in Metern).

Angabe	Wert
Entfernung der Mauer	9,15 m
Höhe der springenden Mauer	1,90 m
Entfernung zum Tor	20 m
Höhe der Torlatte	2,44 m



a) Unter welchem Winkel wird der Ball abgeschossen?
b) Fliegt der Ball über die Mauer?
c) Geht der Ball unter der Latte ins Tor? Unter welchem Winkel fällt er dort?
d) Stelle die Tangente bei $x = 20$ auf.
e) Wie hoch wäre der Ball am Tor, wenn er ohne Schwerkraft geradeaus geflogen wäre? Begründe mit der Tangente bei $x = 0$.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Die Sichtlinie über den Hügel

Ein Wanderer steht im Punkt $Q(-4\,|\,0)$ vor einem Hügel mit dem Profil $h(x) = -x^2 + 4$ für $-2 \le x \le 2$ (Einheit 100 m). Seine Sichtlinie über den Hügel ist eine Tangente an den Graphen, die durch Q geht (die Augenhöhe wird vernachlässigt).

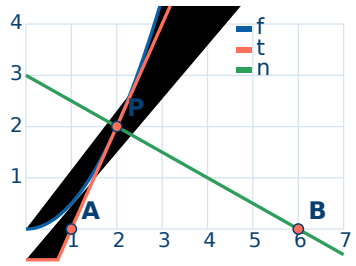
a) Stelle die Tangente im allgemeinen Berührpunkt $B(u\,|\,-u^2+4)$ auf.
b) Setze Q ein und leite die Gleichung $u^2 + 8u + 4 = 0$ her.
c) Löse die Gleichung und wähle die sinnvolle Lösung.
d) Berechne den Berührpunkt und die Steigung der Sichtlinie.
e) Begründe, welcher Teil des Hügels für den Wanderer unsichtbar ist.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Das Beet zwischen Tangente und Normale

Im Schulgarten wird ein Beet von drei Linien begrenzt: dem Weg auf der x-Achse, der Tangente und der Normale an die Parabel $f(x) = 0{,}5x^2$ im Punkt $P(2\,|\,2)$ (Einheit

Meter).



a) Stelle Tangente und Normale in P auf.
b) Berechne die Schnittpunkte A und B beider Geraden mit der x-Achse.
c) Berechne den Flächeninhalt des dreieckigen Beets.
d) Wie viel Erde wird für eine 20 cm hohe Schicht benötigt?
e) Begründe, dass das Dreieck bei P einen rechten Winkel hat.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Der zweite Schnittpunkt

Die Tangente an $f(x) = x^3$ an der Stelle $u \neq 0$ schneidet den Graphen noch einmal.

a) Zeige, dass die Tangente $t(x) = 3u^2x - 2u^3$ lautet.
b) Zeige: $x^3 - 3u^2x + 2u^3 = (x-u)^2(x+2u)$.
c) Gib den zweiten Schnittpunkt an.
d) Berechne ihn für $u = 1$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Die gesuchte Parabel

Die Gerade $y = 4x - 4$ soll eine Parabel $f(x) = ax^2$ berühren.

a) Stelle die beiden Bedingungen für den Berührpunkt x_0 auf.
b) Bestimme x_0 und a.
c) Zeige allgemein: Die Tangente an die Normalparabel bei u schneidet die x-Achse bei u/2.