Lösungen - Tangenten und Normalen

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f(3)=9$, $P(3\,|\,9)$; $f'(x)=2x$, $f'(3)=6$; $t(x)=6(x-3)+9=6x-9$.
b) $f(-1)=-1$, $P(-1\,|\,-1)$; $f'(x)=3x^2$, $f'(-1)=3$; $t(x)=3(x+1)-1=3x+2$.
c) $f(2)=\frac{1}{2}$, $P(2\,|\,\frac{1}{2})$; $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'(2)=-\frac{1}{4}$; $t(x)=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x+1$.
Probe: $t(2)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.
Merke: Die Tangente hat in x_0 dieselbe Steigung wie der Graph. Man braucht also den Berührpunkt $P(x_0\,|\,f(x_0))$ und die Steigung $f'(x_0)$; dann liefert die Punkt-Steigungs-Form $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ die Gleichung. Die Probe $t(x_0)=f(x_0)$ prüft, ob die Tangente durch den Berührpunkt geht.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $f(1)=1$, $f'(1)=2$, also $m_n=-\frac{1}{2}$. $n(x)=-\frac{1}{2}(x-1)+1=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.
b) $f(1)=-1$, $f'(x)=3x^2-2$, $f'(1)=1$, also $m_n=-1$. $n(x)=-(x-1)-1=-x$.
c) $f(2)=4-8=-4$, $f'(x)=2x-4$, $f'(2)=0$: Die Tangente $y=-4$ ist waagerecht, die Normale ist die senkrechte Gerade $x=2$.
Merke: Die Normale steht senkrecht auf der Tangente. Für ihre Steigung gilt $m_n=-\frac{1}{f'(x_0)}$, denn das Produkt zweier senkrechter Steigungen ist -1. Ist die Tangente waagerecht wie bei c), lässt sich diese Formel nicht anwenden; die Normale ist dann eine senkrechte Gerade der Form $x=x_0$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $f(2)=2\cdot 4-3\cdot 2=2$, also $P(2\,|\,2)$.
b) $f'(x)=4x-3$, $f'(2)=8-3=5$.
c) $t(x)=5(x-2)+2=5x-8$.
d) $t(2)=10-8=2=f(2)$ ✓. Schnittpunkt mit der y-Achse: $t(0)=-8$, also $(0\,|\,-8)$.
Antwort: Die Tangente lautet $t(x)=5x-8$. Sie berührt die Parabel im Punkt $P(2\,|\,2)$ und schneidet die y-Achse bei -8. Die Probe bestätigt, dass Tangente und Graph im Berührpunkt denselben Funktionswert haben.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $f'(x)=3x^2-3=9\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$ oder $x=-2$.
b) $f(2)=2$, $f(-2)=-2$. $t_1(x)=9(x-2)+2=9x-16$;
$t_2(x)=9(x+2)-2=9x+16$.
c) $3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm 1$; Punkte $(1\,|\,-2)$ und $(-1\,|\,2)$ mit den Tangenten $y=-2$ und $y=2$.
Begründung: Gesucht sind die Stellen, an denen die Ableitung den vorgegebenen Wert hat. Da f' quadratisch ist, gibt es zwei solche Stellen. Die beiden Tangenten mit

Steigung 9 sind parallel. Weil f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, liegen auch die Berührpunkte und die waagerechten Tangenten symmetrisch.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $f'(x) = x$, $f'(1) = 1$, $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.
b) $f'(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{3} = 60°$.
c) $x = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$.
d) $f'(-1) = -1 \Rightarrow \alpha = -45°$: Der Graph fällt dort; gegen die positive x-Achse gemessen sind das $135°$.
Merke: Zwischen Steigung m und Steigungswinkel α gilt $\tan\alpha = m$, also $\alpha = \arctan m$. Umgekehrt bestimmt man aus einem gegebenen Winkel die Steigung mit dem Tangens und löst dann $f'(x) = m$. Ein negativer Winkel bedeutet, dass der Graph fällt.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $f'(x) = 2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3$; $f(3) = 3$; $t_1(x) = 4(x-3) + 3 = 4x - 9$.
b) Gesuchte Steigung: $m = -1 : (-\frac{1}{2}) = 2$. $2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$, $f(2) = 0$;
$t_2(x) = 2(x-2) + 0 = 2x - 4$.
c) Die Steigungen 4 und 2 sind verschieden, also schneiden sich die Geraden.
$4x - 9 = 2x - 4 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$, $y = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 = 1$: $S(2{,}5 \mid 1)$.
Merke: Parallele Geraden haben dieselbe Steigung. Senkrechte Geraden haben Steigungen, deren Produkt -1 ist. Man bestimmt also zuerst die gewünschte Steigung, löst dann $f'(x) = m$ und stellt die Tangente auf. Zwei Geraden mit verschiedenen Steigungen schneiden sich immer genau einmal.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $t(x) = 2u(x-u) + u^2 + 1 = 2ux - u^2 + 1$.
b) $t(0) = -u^2 + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$ oder $u = -1$.
c) $t_1(x) = 2x$ mit $B_1(1 \mid 2)$; $t_2(x) = -2x$ mit $B_2(-1 \mid 2)$.
d) $t(0) = -u^2 + 1 = 2$ verlangt $u^2 = -1$: unmöglich. Der Punkt $(0 \mid 2)$ liegt oberhalb des Scheitels innerhalb der nach oben geöffneten Parabel, von dort aus gibt es keine Tangente.
Merke: Liegt der gegebene Punkt nicht auf dem Graphen, kennt man den Berührpunkt nicht. Man stellt die Tangente deshalb im allgemeinen Punkt $B(u \mid f(u))$ auf und setzt den gegebenen Punkt ein. Die Lösungen für u liefern die Berührpunkte; hier sind die beiden Tangenten symmetrisch zur y-Achse.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $f(6) = 0{,}05 \cdot 36 = 1{,}8$ m.
b) $f'(x) = 0{,}1x$, $f'(6) = 0{,}6$.
c) $\alpha = \arctan 0{,}6 \approx 31{,}0°$.
d) $t(x) = 0{,}6(x-6) + 1{,}8 = 0{,}6x - 1{,}8$. $0{,}6x - 1{,}8 = 3 \Rightarrow x = 8$, also 2 m hinter der Kante.

Antwort: Die Kante der Rampe liegt $1{,}8$ m hoch, der Fahrer hebt dort unter einem Winkel von etwa 31° ab. Die Tangente beschreibt seine Startrichtung; in Wirklichkeit fällt er wegen der Schwerkraft unter diese Gerade.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $f'(x) = x$, $f'(1) = 1$; $t(x) = (x-1) + 0{,}5 = x - 0{,}5$.
b) $t(3) = 3 - 0{,}5 = 2{,}5$: Ja, S liegt auf der Tangente.
c) $x - 0{,}5 = 0 \Rightarrow x = 0{,}5$, also 50 m vom Ursprung entfernt.
d) $m_n = -1$: $n(x) = -(x-1) + 0{,}5 = -x + 1{,}5$; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0\,|\,1{,}5)$.
Begründung: Das rutschende Auto bewegt sich in Richtung der Tangente weiter, weil es keine Kurvenkraft mehr gibt. Da die Scheune auf der Tangente liegt, ist sie gefährdet. Die Normale steht senkrecht auf der Fahrtrichtung; ihre Steigung ist -1, weil $1 \cdot (-1) = -1$.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $f'(x) = -0{,}04x + 0{,}8$, $f'(0) = 0{,}8$.
b) $\alpha = \arctan 0{,}8 \approx 38{,}7^\circ$.
c) $f(0) = 0$, also $t(x) = 0{,}8x$.
d) $-0{,}04x + 0{,}8 = 0{,}4 \Rightarrow x = 10$ m; $f(10) = -2 + 8 = 6$ m.
Antwort: Am linken Fußpunkt steigt der Bogen mit $80\,\%$, also unter etwa $38{,}7^\circ$ an. Wegen der Symmetrie der Parabel fällt er am rechten Fußpunkt $x = 40$ unter demselben Winkel ab. In 10 m Entfernung ist er noch halb so steil und 6 m hoch.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $f'(x) = 0{,}5x$, $f'(2) = 1$; $t(x) = (x-2) + 1 = x - 1$.
b) $m_n = -1$; $n(x) = -(x-2) + 1 = -x + 3$.
c) $n(0) = 3$: Schnittpunkt $(0\,|\,3)$.
d) Die Normale hat den Steigungswinkel -45°, sie ist also um 45° gegen die Senkrechte geneigt. Der Einfallswinkel beträgt 45°; der Strahl wird waagerecht zur y-Achse reflektiert und trifft sie im Brennpunkt $(0\,|\,1)$.
Merke: Bei der Reflexion ist der Einfallswinkel zur Normalen gleich dem Ausfallswinkel. Bei einer Parabel werden alle Strahlen, die parallel zur Symmetrieachse einfallen, in den Brennpunkt reflektiert. Bei $f(x) = 0{,}25x^2$ liegt der Brennpunkt bei $(0\,|\,1)$; dort konzentriert sich die Wärme des Solarkochers.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $h'(x) = -0{,}15x^2 + 1{,}2x$; $h'(2) = -0{,}6 + 2{,}4 = 1{,}8$.
b) $h(2) = -0{,}4 + 2{,}4 = 2{,}0$; $t(x) = 1{,}8(x-2) + 2 = 1{,}8x - 1{,}6$.
c) $h''(x) = -0{,}3x + 1{,}2 = 0 \Rightarrow x = 4$; $h'(4) = -2{,}4 + 4{,}8 = 2{,}4$.
d) $h(4) = -3{,}2 + 9{,}6 = 6{,}4$; $t(x) = 2{,}4(x-4) + 6{,}4 = 2{,}4x - 3{,}2$.
Begründung: Die steilste Stelle eines Hanges ist das Maximum der Steigung, also eine Nullstelle von h''. Wegen $h''' = -0{,}3$ ist h' dort maximal. Die Steigung $2{,}4$ bedeutet 240 m Höhengewinn pro Kilometer, das sind $24\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $f(0) = 0{,}1 \cdot 36 = 3{,}6$ m.
b) $f'(x) = 0{,}2(x-6)$, $f'(0) = -1{,}2$; Gefällewinkel $\arctan 1{,}2 \approx 50{,}2°$.
c) $0{,}2(x-6) = -\tan 30° \approx -0{,}577 \Rightarrow x \approx 3{,}11$ m.
d) $f(3) = 0{,}9$, $f'(3) = -0{,}6$; $t(x) = -0{,}6(x-3) + 0{,}9 = -0{,}6x + 2{,}7$.
Begründung: Die Ableitung ist im ganzen Bereich negativ, die Rutsche fällt also stetig. Für ein Gefälle von $30°$ muss $f'(x) = -\tan 30°$ gelten. Am Ende der Rutsche bei $x = 6$ ist $f'(6) = 0$: Die Rutsche läuft waagerecht aus, das ist für die Badegäste angenehm.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $f(1) = 1$, $g(1) = -1 + 4 - 2 = 1$; $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$; $g'(x) = -2x + 4$, $g'(1) = 2$.
b) $t(x) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.
c) Steigung 2: $2x = 2 \Rightarrow x = 1$, Berührpunkt $(1\,|\,1)$, also $1 = 2 + c \Rightarrow c = -1$. Kontrolle: $x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ hat genau eine (doppelte) Lösung.
Merke: Zwei Graphen berühren sich in einem Punkt, wenn dort Funktionswert und Steigung übereinstimmen. Sie haben dann eine gemeinsame Tangente. Eine Gerade berührt eine Parabel genau dann, wenn die Schnittgleichung eine doppelte Lösung hat.

Lösung zu Aufgabe 15

a)

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	5	10	7{,}5	5	10

b) $f'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}6x + 2{,}25 = 0{,}03(x^2 - 20x + 75) = 0{,}03(x-5)(x-15)$; waagerecht bei $x = 5$ (Hochpunkt) und $x = 15$ (Tiefpunkt).
c) $f''(x) = 0{,}06x - 0{,}6 = 0 \Rightarrow x = 10$; $f'(10) = 3 - 6 + 2{,}25 = -0{,}75$; Gefällewinkel $\arctan 0{,}75 \approx 36{,}9°$.
d) $t(x) = -0{,}75(x-10) + 7{,}5 = -0{,}75x + 15$.
e) An den Rändern gilt $f'(0) = f'(20) = 2{,}25$, das sind $\arctan 2{,}25 \approx 66{,}0°$ Steigung. Da f' eine nach oben geöffnete Parabel mit Tiefpunkt bei $x = 10$ ist, nimmt $|f'|$ im Intervall seinen größten Wert an den Rändern an: Dort ist die Bahn am steilsten.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $h'(x) = -0{,}05x + 0{,}6$, $h'(0) = 0{,}6$; $\alpha = \arctan 0{,}6 \approx 31{,}0°$.
b) $h(9{,}15) \approx 3{,}40$ m $> 1{,}90$ m: Der Ball fliegt über die Mauer.
c) $h(20) = -10 + 12 = 2$ m m: Tor. $h'(20) = -0{,}4$, Fallwinkel $\arctan 0{,}4 \approx 21{,}8°$.
d) $t(x) = -0{,}4(x-20) + 2 = -0{,}4x + 10$.
e) Die Tangente bei $x = 0$ ist $y = 0{,}6x$; bei $x = 20$ ergibt sie 12 m. Die Schwerkraft zieht den Ball also um 10 m unter diese Gerade.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $h'(x) = -2x$; $t(x) = -2u(x-u) - u^2 + 4 = -2ux + u^2 + 4$.
b) $t(-4) = 8u + u^2 + 4 = 0$, also $u^2 + 8u + 4 = 0$.
c) $u = -4 \pm \sqrt{12}$; $u_1 \approx -0{,}536$ liegt im Hügelbereich, $u_2 \approx -7{,}464$ liegt außerhalb von $[-2;2]$.
d) $B(-0{,}536 \,|\, 3{,}713)$; Steigung $m = -2u \approx 1{,}072$.
e) Die Sichtlinie berührt den Hügel bei $x \approx -0{,}54$. Alle Punkte des Hügels mit $x > -0{,}54$ liegen unter der Sichtlinie auf der abgewandten Seite: Der Wanderer sieht den Gipfel $(0 \,|\, 4)$ nicht, nur den Hang davor.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $f'(x) = x$, $f'(2) = 2$; $t(x) = 2(x-2) + 2 = 2x - 2$;
$n(x) = -\frac{1}{2}(x-2) + 2 = -\frac{1}{2}x + 3$.
b) $2x - 2 = 0 \Rightarrow A(1 \,|\, 0)$; $-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow B(6 \,|\, 0)$.
c) Grundseite $AB = 5$ m, Höhe 2 m (y-Wert von P): $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5\,\mathrm{m}^2$.
d) $V = 5 \cdot 0{,}2 = 1{,}0\,\mathrm{m}^3$, also 1000 Liter Erde.
e) Die Steigungen 2 und $-\frac{1}{2}$ erfüllen $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$: Tangente und Normale stehen senkrecht aufeinander.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $t(x) = 3u^2(x-u) + u^3 = 3u^2x - 3u^3 + u^3 = 3u^2x - 2u^3$.
b)
$(x-u)^2(x+2u) = (x^2 - 2ux + u^2)(x+2u) = x^3 + 2ux^2 - 2ux^2 - 4u^2x + u^2x + 2u^3 = x^3 - 3u^2x + 2u^3$
.
c) Aus $f(x) = t(x)$ folgt $(x-u)^2(x+2u) = 0$: doppelte Lösung $x = u$ (Berührpunkt) und $x = -2u$; zweiter Schnittpunkt $(-2u \,|\, -8u^3)$.
d) $u = 1$: Tangente $t(x) = 3x - 2$, zweiter Schnittpunkt $(-2 \,|\, -8)$; Probe: $t(-2) = -6 - 2 = -8$ ✓.
Merke: Jede Tangente an x^3 (außer im Ursprung) schneidet den Graphen ein zweites Mal. Der Berührpunkt ist eine doppelte Lösung der Schnittgleichung, deshalb erscheint der Faktor $(x-u)^2$. Der zweite Schnittpunkt liegt immer bei $x = -2u$, also auf der anderen Seite des Ursprungs.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Gleiche Steigung: $2ax_0 = 4$; gleicher Funktionswert: $ax_0^2 = 4x_0 - 4$.
b) Aus der ersten Gleichung $ax_0 = 2$, also $ax_0^2 = 2x_0$. Eingesetzt:
$2x_0 = 4x_0 - 4 \Rightarrow x_0 = 2$, $a = 1$. Die Parabel ist $f(x) = x^2$, Berührpunkt $(2 \,|\, 4)$.
c) $t(x) = 2u(x-u) + u^2 = 2ux - u^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{u}{2}$ (für $u \neq 0$). Für $u = 2$: Nullstelle 1, passend zu $4x - 4 = 0$.
Begründung: Berühren bedeutet gleicher Funktionswert und gleiche Steigung, das ergibt zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten x_0 und a. Das allgemeine Ergebnis aus c) liefert eine schnelle Konstruktion: Die Tangente an x^2 im Punkt mit $x = u$ geht

durch $\left(\frac{u}{2} \mid 0\right)$.