Lösungen zur Klassenarbeit - Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Verfahren

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Da in Gleichung (II) x ohne Vorfaktor steht, eignet sich das Einsetzungsverfahren. Aus $x - y = 1$ folgt $x = y + 1$ (1 P.). Eingesetzt in (I): $2(y + 1) + 3y = 12$, also $2y + 2 + 3y = 12$, $5y = 10$ und $y = 2$ (1 P.). Rückeinsetzen: $x = 2 + 1 = 3$. Lösung: $(3|2)$ (1 P.).
b) Probe in beiden Ausgangsgleichungen: (I) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$, wahr; (II) $3 - 2 = 1$, wahr (1 P.). Geometrisch schneiden sich die beiden Geraden $y = 4 - \frac{2}{3}x$ und $y = x - 1$ im Punkt $(3|2)$. Alternativ mit dem Additionsverfahren: (I) plus 3·(II) ergibt $5x = 15$, also ebenfalls $x = 3$. Antwort: $L = \{(3|2)\}$.

Lösung zu Aufgabe 2 (6 BE/Punkte)

a) Ziel ist, eine Variable aus zwei Gleichungen zu entfernen. z hat in (I) und (III) die Koeffizienten $+1$ und -1: Addition (I)+(III) ergibt $2x + 4y = 16$ (IV). In (I) und (II) hat z jeweils $+1$: Subtraktion (I)−(II) ergibt $-x + 2y = 4$ (V) (2 P.).
b) Aus (V) folgt $x = 2y - 4$. In (IV) eingesetzt: $2(2y - 4) + 4y = 16$, $8y - 8 = 16$, $y = 3$; dann $x = 2 \cdot 3 - 4 = 2$ (2 P.). Aus (I): $z = 9 - 2 - 3 = 4$. Lösung $(2|3|4)$ (1 P.).
c) Probe in den Gleichungen, die nicht zur Berechnung von z benutzt wurden: (II) $2 \cdot 2 - 3 + 4 = 5$, wahr; (III) $2 + 3 \cdot 3 - 4 = 7$, wahr (1 P.). Die Lösung ist eindeutig; geometrisch schneiden sich drei Ebenen in genau einem Punkt.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Jeder Punkt liefert eine Gleichung, indem man seine Koordinaten in $f(x) = ax^2 + bx + c$ einsetzt. $A(0|1)$: $c = 1$. $B(1|0)$: $a + b + c = 0$, mit $c = 1$ also $a + b = -1$. $C(2|1)$: $4a + 2b + c = 1$, also $4a + 2b = 0$ bzw. $2a + b = 0$ (2 P.). Subtraktion der beiden Gleichungen: $(2a + b) - (a + b) = 0 - (-1)$, also $a = 1$; damit $b = -2$ (1 P.).
b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Das ist die zweite binomische Formel: $f(x) = (x - 1)^2$, der Scheitel liegt bei $S(1|0)$ (1 P.). Weil der Scheitel auf der x-Achse liegt, ist $x = 1$ eine doppelte Nullstelle und B der Berührpunkt mit der Achse. Probe: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$; alle drei Punkte liegen auf der Parabel.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Variablen festlegen: x Anzahl der Erwachsenenkarten, y Anzahl der Schülerkarten. Kartenzahl: $x + y = 80$ (I). Einnahmen: $5x + 3y = 340$ (II) (2 P.).
b) Aus (I) folgt $y = 80 - x$. Eingesetzt in (II): $5x + 3(80 - x) = 340$, also $5x + 240 - 3x = 340$, $2x = 100$, $x = 50$; dann $y = 80 - 50 = 30$ (1 P.). Probe: $50 + 30 = 80$ Karten und $5 \cdot 50 + 3 \cdot 30 = 250 + 90 = 340$ € (1 P.). Antwort: Es wurden 50

Karten für Erwachsene und 30 Karten für Schüler verkauft. Überschlag zur Kontrolle: Hätten alle 80 Besucher den Schülerpreis bezahlt, wären es 240 €; die fehlenden 100 € stammen aus den 2 € Aufpreis je Erwachsenenkarte, also 50 Erwachsene.

Lösung zu Aufgabe 5 (2 BE/Punkte)

Man multipliziert (II) mit 2: $2x + 4y = 2c$. Die linke Seite stimmt dann mit (I) überein. Subtraktion (I)$-2\cdot$(II) ergibt $0 = 6 - 2c$ (1 P.).
Fall $c = 3$: Es entsteht die wahre Aussage $0 = 0$. Beide Gleichungen sind Vielfache voneinander und beschreiben dieselbe Gerade $y = \frac{3-x}{2}$. Jeder Punkt dieser Geraden ist Lösung, es gibt unendlich viele, etwa $(3|0)$ oder $(1|1)$.
Fall $c \neq 3$: Es entsteht ein Widerspruch wie $0 = 4$ für $c = 1$. Die Geraden haben dieselbe Steigung $-\frac{1}{2}$, aber verschiedene Achsenabschnitte; sie sind echt parallel und schneiden sich nie, das System hat keine Lösung (1 P.). Eine eindeutige Lösung ist für kein c möglich.