Lernzettel - Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Verfahren

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Kinokarten und Kassenzettel

An der Kinokasse wurden 120 Karten verkauft: Erwachsene zahlen *9\,€*, Kinder *6\,€*. Die Tageseinnahme beträgt *840\,€*. Wie viele Karten gingen an Erwachsene? Hier sind zwei Unbekannte (Erwachsene und Kinder) mit zwei Bedingungen verbunden: ein **lineares Gleichungssystem** (LGS). Bei drei Unbekannten, zum Beispiel drei Produkten auf einem Kassenzettel, braucht man ein systematisches Verfahren. Das **Gaußsche Eliminationsverfahren** löst jedes lineare Gleichungssystem Schritt für Schritt und zeigt zugleich, ob es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

Lineare Gleichungssysteme

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) besteht aus mehreren linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. In der Einführungsphase betrachtest du vor allem Systeme mit drei Gleichungen und drei Variablen x, y, z. Die **Lösungsmenge** enthält alle Zahlentripel, die jede Gleichung erfüllen. Solche Systeme treten bei Preisaufgaben, Mischungen, Zahlenrätseln und beim Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Punkten auf.

Wiederholung: Zwei Gleichungen, zwei Variablen

Beim **Einsetzungsverfahren** löst du eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt sie in die andere ein. Beim **Additionsverfahren** addierst du Vielfache der Gleichungen so, dass eine Variable verschwindet. Beispiel: $3x + 2y = 12$ und $x - 2y = 4$. Die Addition ergibt $4x = 16$, also $x = 4$ und $y = 0$.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Das **Gauß-Verfahren** bringt ein System in eine **Stufenform**, aus der du die Lösung von unten nach oben ablesen kannst. Erlaubte Umformungen sind: Gleichungen vertauschen, eine Gleichung mit einer Zahl ungleich null multiplizieren, ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren. Sie verändern die Lösungsmenge nicht.

Beispiel 1. Gegeben ist

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & x + y + z &&= 6 \\ \text{II} \quad & 2x - y + z &&= 3 \\ \text{III} \quad & x + 2y - z &&= 2 \end{aligned}$$

Schritt 1: Eliminiere x aus II und III. $\text{II} - 2 \cdot \text{I}$: $-3y - z = -9$. $\text{III} - \text{I}$: $y - 2z = -4$. Schritt 2: Eliminiere y aus der dritten Gleichung. Rechne $3 \cdot (y - 2z = -4) + (-3y - z = -9)$: $-7z = -21$, also $z = 3$. Schritt 3: Rückwärts einsetzen. $y - 2 \cdot 3 = -4 \Rightarrow y = 2$. $x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$. Lösung: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, also $L = \{(1 \mid 2 \mid 3)\}$. Probe in allen drei

Gleichungen: $1+2+3=6$, $2-2+3=3$, $1+4-3=2$.

Drei Fälle für die Lösungsmenge

- **Genau eine Lösung:** Die Stufenform hat in jeder Zeile eine neue Variable (wie im Beispiel 1).
- **Keine Lösung:** Es entsteht ein Widerspruch wie $0=5$. Beispiel: $x+y+z=1$, $2x+2y+2z=5$, $x-y=0$. Verdoppelt man die erste Gleichung, erhält man $2x+2y+2z=2$, im Widerspruch zu 5. $L=\{\}$.
- **Unendlich viele Lösungen:** Eine Zeile wird zu $0=0$. Dann wählst du eine Variable als Parameter. Beispiel: $x+y+z=3$, $x-y+z=1$, $2x+2z=4$. Addition der ersten beiden Gleichungen ergibt $2x+2z=4$, die dritte Gleichung enthält keine neue Information. Aus der Differenz folgt $2y=2$, also $y=1$. Mit $z=t$ gilt $x=2-t$. $L=\{(2-t\,|\,1\,|\,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

Anwendung: Funktionsgleichung aus Punkten

Eine Parabel $f(x)=ax^2+bx+c$ soll durch $(0\,|\,1)$, $(1\,|\,0)$ und $(2\,|\,3)$ gehen. Einsetzen ergibt: $c=1$; $a+b+c=0$; $4a+2b+c=3$. Mit $c=1$ bleiben $a+b=-1$ und $4a+2b=2$. Die zweite Gleichung halbiert, ergibt $2a+b=1$. Subtraktion: $a=2$, dann $b=-3$. Die Parabel ist $f(x)=2x^2-3x+1$.

Anwendung: Sachaufgaben

Gehe in vier Schritten vor: Unbekannte festlegen, Gleichungen aus dem Text aufstellen, System lösen, Antwort mit Einheit formulieren. Beispiel: Zwei Erwachsene und drei Kinder zahlen 27 €, drei Erwachsene und zwei Kinder zahlen 28 €. Aus $2E+3K=27$ und $3E+2K=28$ folgt durch Multiplikation mit 3 und 2 und Subtraktion $5K=25$, also $K=5$ und $E=6$. Ein Erwachsenenticket kostet 6 €, ein Kinderticket 5 €.

Systeme mit Parameter

Bei Systemen mit einem Parameter a fragt man, wie viele Lösungen es je nach a gibt. Beispiel: $x+y=5$ und $2x+ay=10$. Die zweite Gleichung minus das Doppelte der ersten ergibt $(a-2)y=0$. Für $a\neq 2$ folgt $y=0$ und $x=5$: genau eine Lösung. Für $a=2$ entsteht $0=0$: unendlich viele Lösungen.

Geometrische Deutung

Jede Gleichung mit zwei Variablen beschreibt eine Gerade in der Ebene, und die Lösung eines Systems ist der Schnittpunkt. Bei keinem Schnittpunkt sind die Geraden parallel, bei unendlich vielen Lösungen fallen sie zusammen. Mit drei Variablen beschreibt jede Gleichung eine Ebene im Raum. Die Lösung ist dann der gemeinsame Punkt der drei Ebenen. Diese Deutung hilft dir später in der analytischen Geometrie, Lagebeziehungen zu verstehen.

Definition: Lineares Gleichungssystem

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) besteht aus mehreren Gleichungen, in denen die Unbekannten nur in der ersten Potenz vorkommen und nicht miteinander multipliziert werden. Eine **Lösung** ist ein Zahlentupel, das alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt. Die **Lösungsmenge** L ist die Menge aller Lösungen. Ein LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten heißt $(m \times n)$-System.

So gehst du vor: Gaußsches Eliminationsverfahren

1. Schreibe das System untereinander und nummeriere die Gleichungen (I), (II), (III).
2. Eliminiere x aus (II) und (III), indem du ein geeignetes Vielfaches von (I) abziehst oder addierst.
3. Eliminiere y aus (III) mit Hilfe der neuen (II). Es entsteht die Dreiecksform.
4. Löse die letzte Gleichung nach z und setze von unten nach oben ein (Rückwärtseinsetzen).
5. Mache die Probe in allen ursprünglichen Gleichungen und schreibe die Lösungsmenge auf.

Beispiel 5

Löse $x + y + z = 6,\ 2x - y + z = 3,\ x + 2y - z = 2$**.**

(I) $x + y + z = 6$, (II) $2x - y + z = 3$, (III) $x + 2y - z = 2$. Eliminiere x: (II)-2(I) gibt $-3y - z = -9$; (III)$-$(I) gibt $y - 2z = -4$. Das ergibt das 2×2-System $3y + z = 9$, $y - 2z = -4$. Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 2z - 4$; in die erste eingesetzt: $6z - 12 + z = 9$, also $z = 3$, $y = 2$ und $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Probe in (II): $2 - 2 + 3 = 3$ ✓. Lösungsmenge: $L = \{(1 \mid 2 \mid 3)\}$.

Satz: Die drei Lösungsfälle

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder **genau eine Lösung**, **keine Lösung** oder **unendlich viele Lösungen**. Im Gauß-Verfahren erkennst du das an der Dreiecksform: Entsteht eine Zeile $0 = c$ mit $c \neq 0$, gibt es keine Lösung. Entsteht eine Zeile $0 = 0$ und bleibt eine Unbekannte frei wählbar, gibt es unendlich viele Lösungen, die man mit einem Parameter t angibt. Bei zwei Unbekannten bedeutet das geometrisch: Die Geraden schneiden sich, sind parallel oder fallen zusammen.

Beispiel 6

Löse $x + y + z = 3,\ x - y = 1,\ 2x + z = 4$**.**

Aus (II): $y = x - 1$. In (I): $x + x - 1 + z = 3$, also $z = 4 - 2x$. Die dritte Gleichung $2x + z = 4$ liefert nach Einsetzen $2x + 4 - 2x = 4$, also $4 = 4$: eine wahre Aussage, die keine neue Information enthält. Mit $x = t$ folgt $y = t - 1$, $z = 4 - 2t$. Die Lösungsmenge ist $L = \{(t \mid t - 1 \mid 4 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; sie beschreibt eine Gerade im Raum.

Beispiel 7

Löse $x + y = 2,\ y + z = 3,\ x - z = 1$.

Subtrahiert man (II) von (I), so entsteht $x - z = -1$. Die dritte Gleichung verlangt aber $x - z = 1$. Das ist ein Widerspruch ($-1 = 1$). Es gibt keine Lösung: $L = \{\}$. Die drei Bedingungen vertragen sich nicht.

Beispiel 8

Bestimme die Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch $A(1\,|\,2)$, $B(2\,|\,3)$ und $C(3\,|\,6)$.

Die Punkte liefern $a + b + c = 2$, $4a + 2b + c = 3$, $9a + 3b + c = 6$. Differenzen: (II)−(I): $3a + b = 1$; (III)−(II): $5a + b = 3$. Subtraktion ergibt $2a = 2$, also $a = 1$, $b = -2$ und $c = 3$. Die Parabel ist $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Probe mit C: $9 - 6 + 3 = 6$ ✓.

Hinweis: Matrixschreibweise

Beim Gauß-Verfahren kannst du die Variablen weglassen und nur die Koeffizienten aufschreiben. Das System $x + 2y = 5$, $3x + 4y = 11$ wird zur erweiterten Koeffizientenmatrix mit den Zeilen $(1\ 2\,|\,5)$ und $(3\ 4\,|\,11)$. Zeilenumformungen (Zeile mit einer Zahl multiplizieren, Zeilen addieren oder vertauschen) verändern die Lösungsmenge nicht. Aus $Z_2 - 3Z_1$ entsteht $(0\ \ -2\,|\,-4)$, also $y = 2$ und $x = 1$.

Achtung

Beim Eliminieren musst du **die ganze Gleichung** mit der Zahl multiplizieren, nicht nur einen Teil, und beim Subtrahieren alle Vorzeichen beachten. Ein häufiger Fehler ist es, $2x - y = 3$ von $x + y = 6$ abzuziehen und dabei das Vorzeichen bei y falsch zu behandeln. Prüfe jedes Ergebnis durch Einsetzen in **alle** Ausgangsgleichungen, nicht nur in die letzte. Und vergiss bei unendlich vielen Lösungen nicht, den Parameter anzugeben.

Wusstest du?

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) hat das Eliminationsverfahren nicht erfunden: Schon die „Neun Kapitel der mathematischen Kunst“ aus dem alten China (etwa 200 v. Chr.) beschreiben es für Ertragsaufgaben auf Feldern. Gauß nutzte das Verfahren für Ausgleichsrechnungen in der Landvermessung. Heute lösen Computer damit Gleichungssysteme mit Millionen Unbekannten, etwa bei Wettermodellen und Bildverarbeitung.

So gehst du vor: Einsetzungs- und Additionsverfahren bei zwei Unbekannten

1. Beim **Einsetzungsverfahren** löst du eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt den Term in die andere Gleichung ein.
2. Beim **Additionsverfahren** multiplizierst du die Gleichungen so, dass bei einer

Variablen entgegengesetzte Koeffizienten entstehen, und addierst dann beide Gleichungen.
3. Wähle das Verfahren, das weniger Rechenarbeit verursacht, und berechne danach die zweite Variable.

Häufige Fehler

- Beim Subtrahieren von Gleichungen das Vorzeichen nur bei einem Summanden ändern; auch die rechte Seite muss mitgerechnet werden.
- Nur eine Gleichung der Probe prüfen; die Lösung muss in allen Gleichungen stimmen.
- Bei $0 = 0$ wird fälschlich „keine Lösung“ notiert; richtig sind unendlich viele Lösungen.
- Bei Sachaufgaben die Unbekannten nicht definieren und im Antwortsatz keine Einheit schreiben.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein LGS hat genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen.
- Gauß-Verfahren: Gleichungen so umformen, dass eine Dreiecksform entsteht, dann von unten nach oben einsetzen.
- Erlaubte Umformungen: Gleichung mit $c \neq 0$ multiplizieren, Vielfache addieren oder subtrahieren, Gleichungen vertauschen.
- Zeile $0 = c$ mit $c \neq 0$: keine Lösung; Zeile $0 = 0$: Parameter nötig, unendlich viele Lösungen.
- Funktionsgleichung aus Punkten: Punkte in den Ansatz einsetzen und das entstehende LGS lösen.
- Textaufgaben: Unbekannte festlegen, Gleichungen aufstellen, lösen, Probe am Text, Antwortsatz.
- Bei zwei Unbekannten bedeutet das geometrisch: Schnittpunkt, Parallelität oder identische Geraden.
- Immer die Probe in allen Ausgangsgleichungen durchführen.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Beginne immer mit der Gleichung, die die einfachsten Koeffizienten hat, und achte beim Eliminieren darauf, jede Zeile sauber zu beschriften, zum Beispiel $\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}$. So findest du Fehler schnell und bekommst in der Klausur auch bei einem Rechenfehler Punkte für das richtige Vorgehen.

Zusammenfassung

Das Gauß-Verfahren löst lineare Gleichungssysteme systematisch: Variablen schrittweise eliminieren, Stufenform herstellen, rückwärts einsetzen. Die Lösungsmenge kann aus genau einem Tripel, aus keinem oder aus unendlich vielen bestehen. Die Methode ist die Grundlage für viele spätere Aufgaben, etwa die Bestimmung von Funktionsgleichungen und die Untersuchung der Lage von Geraden und Ebenen im Raum.

Vom Gleichungssystem zur Koeffizientenmatrix

Zur Schreibersparnis lässt man die Variablen weg und notiert nur die Koeffizienten. Das Beispiel 1 sieht dann so aus:  . Die Umformungen werden dann an den Zeilen durchgeführt. Das ist übersichtlicher und weniger fehleranfällig, besonders bei vielen Variablen. In der Qualifikationsphase begegnet dir diese Schreibweise wieder, dort mit Taschenrechnerunterstützung.