Lösungen - Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Verfahren

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) Einsetzen: $x + 2x - 1 = 8 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$, $y = 5$. Probe: $3 + 5 = 8$ ✓.
$L = \{(3 \mid 5)\}$.
b) $6y - y = 10 \Rightarrow y = 2$, $x = 6$. Probe: $12 - 2 = 10$ ✓.
c) $3x + 2(x + 4) = 23 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$, $y = 7$. Probe: $9 + 14 = 23$ ✓.
Begründung: Beim Einsetzungsverfahren ist eine Gleichung schon nach einer Variablen aufgelöst. Man setzt diesen Term in die andere Gleichung ein und erhält eine Gleichung mit nur einer Unbekannten. Antwort: Die Lösungen sind $(3 \mid 5)$, $(6 \mid 2)$ und $(3 \mid 7)$. Die Probe muss immer in beiden Gleichungen stimmen.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Addition: $4x = 16 \Rightarrow x = 4$; dann $2y = 0 \Rightarrow y = 0$. $L = \{(4 \mid 0)\}$.
b) Addition: $3x = 9 \Rightarrow x = 3$, $y = 1$. Probe: $6 + 1 = 7$ ✓.
c) Zweite Gleichung mal 3: $6x - 3y = 9$; Addition: $11x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{11}$;
$y = 2x - 3 = \frac{56}{11} - \frac{33}{11} = \frac{23}{11}$. Probe: $5 \cdot \frac{28}{11} + 3 \cdot \frac{23}{11} = \frac{140+69}{11} = 19$ ✓.
Begründung: Beim Additionsverfahren multipliziert man die Gleichungen so, dass vor einer Variablen entgegengesetzte Zahlen stehen. Bei a) und b) ist das schon der Fall, bei c) muss man die zweite Gleichung erst mit 3 multiplizieren. Die Addition lässt dann y wegfallen, und x kann direkt berechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $2x + 1 = -x + 7 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$, $y = 5$. Schnittpunkt $S(2 \mid 5)$, wie im Bild.
b) $3x - 2 = -x + 6 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$, $y = 4$. Schnittpunkt $S(2 \mid 4)$.
Begründung: Sind beide Gleichungen nach y aufgelöst, setzt man die rechten Seiten gleich. Der gemeinsame Punkt muss auf beiden Geraden liegen, also dieselbe y-Koordinate haben. Probe zu a): $2 \cdot 2 + 1 = 5$ und $-2 + 7 = 5$. Probe zu b): $3 \cdot 2 - 2 = 4$ und $-2 + 6 = 4$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) (II)-2(I): $0 = 2$, Widerspruch. $L = \{\}$: Die Geraden sind parallel.
b) (II)-2(I): $0 = 0$. Unendlich viele Lösungen: $L = \{(t \mid 3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; die Geraden sind identisch.
c) Addition: $2x = 4 \Rightarrow x = 2$, $y = 1$. Genau ein Schnittpunkt $(2 \mid 1)$.
Merke: Entsteht beim Umformen eine falsche Aussage wie $0 = 2$, hat das System keine Lösung; die Geraden haben dieselbe Steigung, aber verschiedene Achsenabschnitte. Entsteht eine wahre Aussage wie $0 = 0$, sind beide Gleichungen gleichwertig und es

gibt unendlich viele Lösungen. Sonst gibt es genau eine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 5

a) (II)-2(I): $-3y - z = -9$; (III)$-$(I): $y - 2z = -4$.
b) $y = 2z - 4$ in $3y + z = 9$: $7z = 21 \Rightarrow z = 3$, $y = 2$.
c) $x = 6 - 2 - 3 = 1$. $L = \{(1\,|\,2\,|\,3)\}$
d) Probe: $1 + 4 - 3 = 2$ ✓.
Merke: Beim Gauß-Verfahren eliminiert man schrittweise Variablen, bis ein Dreieckssystem entsteht. Dann löst man von unten nach oben auf. Hier wurde $-3y - z = -9$ mit -1 multipliziert zu $3y + z = 9$. Die Probe in allen drei Gleichungen sichert das Ergebnis ab: $1 + 2 + 3 = 6$, $2 - 2 + 3 = 3$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) (I)+(III): $2x + 3y = 1$; (II)+(III): $3x = 6$.
b) Aus $3x = 6$: $x = 2$; dann $4 + 3y = 1 \Rightarrow y = -1$.
c) Aus (III): $z = x + y + 2 = 2 - 1 + 2 = 3$. $L = \{(2\,|\,-1\,|\,3)\}$.
d) Probe in (II): $4 + 1 + 3 = 8$ ✓.
Begründung: Da z in allen Gleichungen den Koeffizienten ± 1 hat, lässt es sich besonders leicht eliminieren. Die Gleichung $3x = 6$ enthält dann nur noch eine Unbekannte. Probe in (I): $2 - 2 + 3 = 3$; in (III): $2 - 1 - 3 = -2$. Alle drei Gleichungen sind erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 7

a) (I) enthält kein x. Man tauscht die Reihenfolge: (II), (III), (I).
b) (II)$-$(I): $x = 1$ (denn $x + y + z - (y + z) = 6 - 5$).
c) Aus (III): $2 + y = 4 \Rightarrow y = 2$; aus (I): $z = 3$. $L = \{(1\,|\,2\,|\,3)\}$.
d) Probe: $2 + 3 = 5$ ✓; $1 + 2 + 3 = 6$ ✓; $2 + 2 = 4$ ✓.
Merke: Eine geschickte Reihenfolge spart Rechenarbeit. Weil (I) und (II) sich nur im Summanden x unterscheiden, liefert ihre Differenz sofort $x = 1$. Danach ergibt (III) den Wert von y und (I) den Wert von z. Die Lösung ist eindeutig, das System hat genau einen Lösungspunkt.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $y = x - 1$; in (I): $z = 3 - x - (x - 1) = 4 - 2x$.
b) $2x + 4 - 2x = 4$ ist immer wahr: Die dritte Gleichung ist überflüssig.
c) $L = \{(t\,|\,t - 1\,|\,4 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
d) Für $t = 1$: $(1\,|\,0\,|\,2)$; für $t = 2$: $(2\,|\,1\,|\,0)$. Probe: $2 + 1 + 0 = 3$ ✓.
Begründung: Die dritte Gleichung ist die Summe der ersten beiden: $(x + y + z) + (x - y) = 2x + z$ und $3 + 1 = 4$. Sie liefert also keine neue Information. Es bleiben nur zwei unabhängige Gleichungen für drei Unbekannte, deshalb bleibt eine Unbekannte frei wählbar. Geometrisch schneiden sich die drei Ebenen in einer Geraden.

Lösung zu Aufgabe 9

a) (I)$-$(II): $x - z = -1$.
b) (III) verlangt $x - z = 1$. Das ist ein Widerspruch.
c) Das System hat keine Lösung, $L = \{\}$.
Begründung: Aus (I) und (II) folgt zwingend $x - z = -1$. Die dritte Gleichung fordert aber $x - z = 1$. Beides kann nicht gleichzeitig gelten, denn $-1 \neq 1$. Antwort: Das Gleichungssystem ist widersprüchlich und hat keine Lösung. Die drei Ebenen haben keinen gemeinsamen Punkt.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $a + b + c = 2$; $4a + 2b + c = 3$; $9a + 3b + c = 6$.
b) (II)$-$(I): $3a + b = 1$; (III)$-$(II): $5a + b = 3$; also $2a = 2$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.
c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $f(3) = 9 - 6 + 3 = 6$ ✓.
d) $x_S = 1$, $f(1) = 2$: $S(1\,|\,2)$ (der Punkt A ist der Scheitel).
Begründung: Jeder Punkt liefert eine lineare Gleichung für a, b, c. Durch Subtraktion benachbarter Gleichungen fällt c weg, danach b. Antwort: $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Probe mit allen drei Punkten: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 6$.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $f(0) = 3$, $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$.
b) $c = 3$; $4a + 2b + 3 = -1$; $4a + b = 0$.
c) Aus $b = -4a$: $4a - 8a = -4 \Rightarrow a = 1$, $b = -4$. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
d) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.
Begründung: Ein Scheitel liefert zwei Bedingungen: Der Punkt liegt auf dem Graphen, und die Tangente ist dort waagerecht. Zusammen mit P ergeben sich drei Gleichungen für drei Unbekannte. Probe: $f(0) = 3$, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$, $f'(2) = 4 - 4 = 0$. Alle Bedingungen sind erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $x + y = 60$; $0{,}4x + 0{,}1y = 0{,}25 \cdot 60 = 15$.
b) $0{,}4x + 0{,}1(60 - x) = 15 \Rightarrow 0{,}3x = 9 \Rightarrow x = 30$, $y = 30$.
c) $0{,}25 \cdot 60 = 15$ Liter reine Frucht.
d) $0{,}3x = 12 \Rightarrow x = 40$, $y = 20$: mehr vom starken Saft.
Begründung: Die erste Gleichung beschreibt die Gesamtmenge, die zweite die Menge an reiner Frucht. Probe: $0{,}4 \cdot 30 + 0{,}1 \cdot 30 = 12 + 3 = 15$ Liter. Antwort: Man mischt je 30 Liter beider Säfte. Für $30\,\%$ braucht man 40 Liter vom starken und 20 Liter vom schwachen Saft.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $x + y = 120$; $9x + 6y = 840$.
b) $9x + 6(120 - x) = 840 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$, $y = 80$.
c) 40 Erwachsenenkarten und 80 Kinderkarten.

d) Einnahmen *30\cdot9+90\cdot6=810\,€*, also *30\,€* weniger.
Begründung: x zählt die Erwachsenenkarten, y die Kinderkarten. Die erste Gleichung zählt die Karten, die zweite die Einnahmen. Probe: $40 \cdot 9 + 80 \cdot 6 = 360 + 480 = 840$. Jede Verschiebung von einer Erwachsenen- zu einer Kinderkarte verringert die Einnahmen um *3\,€*, bei 10 Karten also um *30\,€*.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $v = 3s$; $v + 12 = 2(s + 12)$.
b) $3s + 12 = 2s + 24 \Rightarrow s = 12$; $v = 36$.
c) Jonas ist 12, sein Vater 36 Jahre alt.
d) In 12 Jahren: 48 und 24; $48 = 2 \cdot 24$ ✓.
Begründung: In 12 Jahren sind beide um 12 Jahre älter, deshalb steht auf beiden Seiten $+12$. Das Einsetzen von $v = 3s$ liefert eine Gleichung mit nur einer Unbekannten. Antwort: Jonas ist heute 12 Jahre alt und sein Vater 36 Jahre.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $s_A(t) = 15t$; $s_B(t) = 20(t - 0{,}5)$.
b) $15t = 20t - 10 \Rightarrow t = 2$ h, also um 11:00 Uhr.
c) $15 \cdot 2 = 30$ km.
d) Vorsprung $15t - 20(t - 0{,}5) = 10 - 5t = 5 \Rightarrow t = 1$, also um 10:00 Uhr (Ben fährt seit 30 Minuten). Vor Bens Start wächst der Vorsprung mit $15t = 5 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$ h: Auch um 9:20 Uhr beträgt er 5 km.
Begründung: Ben startet eine halbe Stunde später, deshalb steht in seiner Funktion $t - 0{,}5$. Beim Einholen haben beide denselben Weg zurückgelegt. Antwort: Ben holt Anna um 11 Uhr nach 30 km ein.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $2x + y + z = 4{,}3$; $x + 2y + z = 5$; $x + y + 3z = 5{,}9$.
b) (II)−(I): $-x + y = 0{,}7$; (III)−(II): $-y + 2z = 0{,}9$; mit (I): $y = x + 0{,}7$, $z = \frac{y+0{,}9}{2}$; eingesetzt in (I): $2x + x + 0{,}7 + \frac{x+1{,}6}{2} = 4{,}3 \Rightarrow x = 0{,}8$. Weiter $y = 1{,}5$, $z = 1{,}2$.
c) *0{,}80+1{,}50+1{,}20=3{,}50\,€*.
d) *5\cdot(0{,}80+1{,}50)=11{,}50\,€*.
Begründung: Jede Zeile der Tabelle ergibt eine Gleichung, die Unbekannten sind die Einzelpreise. Probe: Lena $1{,}60 + 1{,}50 + 1{,}20 = 4{,}30$, Tim $0{,}80 + 3{,}00 + 1{,}20 = 5{,}00$, Mia $0{,}80 + 1{,}50 + 3{,}60 = 5{,}90$. Antwort: Ein Brötchen kostet *0{,}80\,€*, ein Getränk *1{,}50\,€* und ein Obststück *1{,}20\,€*.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $2x + y = 1$, $x + 2y = 1$: Addition $3x + 3y = 2$; Subtraktion $x - y = 0$, also $x = y = \frac{1}{3}$.
b) Für $a = 1$: beide Gleichungen $x + y = 1$; unendlich viele Lösungen $(t \mid 1 - t)$.
c) Für $a = -1$: $-x + y = 1$ und $x - y = 1$; Addition ergibt $0 = 2$: keine Lösung.
d) Addition: $(a + 1)(x + y) = 2$; Subtraktion: $(a - 1)(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$. Also

$x = y = \frac{1}{a+1}$.
Merke: Bei Systemen mit Parameter muss man vor dem Dividieren prüfen, ob der Divisor null werden kann. Hier tritt der Fall $a + 1 = 0$ (keine Lösung) und der Fall $a - 1 = 0$ (unendlich viele Lösungen) gesondert auf. Für alle anderen a gibt es genau eine Lösung, zum Beispiel für $a = 2$ den Punkt $\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $2x + 1 = -x + 7 \Rightarrow x = 2$, $y = 5$; $S(2 \mid 5)$.
b) $A(0 \mid 1)$ und $B(0 \mid 7)$.
c) Grundseite $AB = 6$, Höhe 2: $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$ Flächeneinheiten.
d) $h(3) = -3 + 7 = 4$: Ja, P liegt auf h.
Begründung: Die Seite AB liegt auf der y-Achse und dient als Grundseite. Die Höhe ist der Abstand des Punktes S von der y-Achse, also seine x-Koordinate 2. Antwort: Das Dreieck hat den Flächeninhalt 6 Flächeneinheiten, und P liegt auf h.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Zeilen: $(1 \;\; 2 \mid 5)$ und $(3 \;\; 4 \mid 11)$.
b) $Z_2 - 3Z_1 = (0 \;\; -2 \mid -4)$.
c) $-2y = -4 \Rightarrow y = 2$; $x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$. Probe: $3 + 8 = 11$ ✓.
Merke: In der erweiterten Koeffizientenmatrix schreibt man nur die Zahlen des Systems; rechts vom Strich stehen die rechten Seiten. Zeilenumformungen entsprechen genau den Umformungen der Gleichungen. Ziel ist eine Stufenform, in der unten nur noch eine Unbekannte steht. Die Lösung ist $(1 \mid 2)$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Zwei Gleichungen für drei Unbekannte lassen eine Unbekannte frei.
b) $y = x$, $z = 6 - 2x$.
c) $L = \{(t \mid t \mid 6 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
d) $t = 1$: $(1 \mid 1 \mid 4)$; $1 + 1 + 4 = 6$ ✓ und $1 - 1 = 0$ ✓.
Begründung: Jede Gleichung kann höchstens eine Unbekannte festlegen. Mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten bleibt mindestens eine frei. Die Lösungsmenge ist deshalb eine Gerade im Raum, beschrieben durch den Parameter t. Für jedes t erhält man eine andere gültige Lösung.

Lösung zu Aufgabe 21

a) $a + b = -3$ und $8a + 2b = 0$.
b) Aus der zweiten: $b = -4a$; $a - 4a = -3 \Rightarrow a = 1$, $b = -4$.
c) $f(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$: Nullstellen $-2, 0, 2$.
Begründung: Der Punkt P liefert $f(1) = a + b = -3$, die Nullstelle liefert $f(2) = 8a + 2b = 0$. Probe: $f(1) = 1 - 4 = -3$ und $f(2) = 8 - 8 = 0$. Da nur ungerade Exponenten vorkommen, ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, und die Nullstellen liegen symmetrisch.

Lösung zu Aufgabe 22

a) $x + y = 20$, $x - y = 6$. Addition: $2x = 26 \Rightarrow x = 13$, $y = 7$.
b) $13 \cdot 7 = 91$.
c) Ja, $91 > 90$.
Begründung: Addiert man die beiden Gleichungen, fällt y weg; subtrahiert man sie, fällt x weg. Probe: $13 + 7 = 20$ und $13 - 7 = 6$. Antwort: Die Zahlen sind 13 und 7; ihr Produkt 91 ist größer als 90, die Zusatzbedingung ist also erfüllt.