Lösungen zur Klassenarbeit - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (3 BE/Punkte)

a) Der Grad ist der höchste vorkommende Exponent, hier 3 (von $-2x^3$). Der Leitkoeffizient ist der Faktor vor dieser höchsten Potenz: -2. Der y-Achsenabschnitt ist $f(0) = -5$, also das absolute Glied (2 P.).
b) Für betragsgroße x bestimmt allein der Summand $-2x^3$ das Verhalten, die anderen Summanden wachsen langsamer. Grad 3 ist ungerade und der Leitkoeffizient negativ: Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$, für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (1 P.). Der Graph kommt also von links oben und geht nach rechts unten. Kontrolle mit Zahlen: $f(10) = -2000 + 100 - 5 = -1905$ und $f(-10) = 2000 + 100 - 5 = 2095$. Antwort: Grad 3, Leitkoeffizient -2, y-Achsenabschnitt -5.

Lösung zu Aufgabe 2 (5 BE/Punkte)

a) Die Funktion enthält nur die Potenzen x^4 und x^2 (biquadratisch). Mit der Substitution $z = x^2$ und damit $x^4 = z^2$ entsteht die quadratische Gleichung $z^2 - 10z + 9 = 0$ (1 P.). Nach Vieta suchen wir zwei Zahlen mit Summe 10 und Produkt 9: 1 und 9. Mit der pq-Formel ebenso: $z = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$ (2 P.).
b) Rücksubstitution: $x^2 = 1$ liefert $x = 1$ und $x = -1$; $x^2 = 9$ liefert $x = 3$ und $x = -3$ (1 P.). Die Funktion hat damit die vier Nullstellen -3, -1, 1, 3, mehr kann eine Funktion vierten Grades nicht haben. Faktorisiert: $f(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. Probe: $f(3) = 81 - 90 + 9 = 0$ (1 P.). Die Lage ist symmetrisch zur y-Achse, passend zu den geraden Exponenten.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Weil $f(3) = 0$ gilt, ist $(x-3)$ ein Linearfaktor. Polynomdivision: $x^3 : x = x^2$, abziehen von $x^3 - 3x^2$ lässt $x^2 - 5x$. Dann $x^2 : x = x$, abziehen von $x^2 - 3x$ lässt $-2x + 6$. Schließlich $-2x : x = -2$, abziehen von $-2x + 6$ lässt den Rest 0. Ergebnis: $x^2 + x - 2$ (1 P.). Probe: $(x-3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (1 P.).
b) Quadratischer Faktor: $x^2 + x - 2 = 0$, pq-Formel $x = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} = -0{,}5 \pm 1{,}5$, also $x = 1$ oder $x = -2$ (1 P.). Nullstellen insgesamt: -2, 1, 3. Produktform: $f(x) = (x-3)(x-1)(x+2)$ (1 P.). Kontrolle: $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Kennt man alle Nullstellen einer Funktion dritten Grades, setzt man sie als Linearfaktoren an; ein Streckfaktor a bleibt offen: $f(x) = a(x+1)(x-1)(x-3)$ (1 P.). Der Punkt $P(0|-3)$ liefert die fehlende Bedingung:

$f(0) = a \cdot (0+1) \cdot (0-1) \cdot (0-3) = a \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) = 3a$. Aus $3a = -3$ folgt $a = -1$ (1 P.).
b) Zuerst die dritte binomische Formel $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$, dann ausmultiplizieren: $f(x) = -(x^2-1)(x-3) = -(x^3 - 3x^2 - x + 3) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$ (1 P.). Probe: $f(0) = -3$ und $f(3) = -27 + 27 + 3 - 3 = 0$ (1 P.). Der negative Leitkoeffizient bedeutet, dass der Graph von links oben nach rechts unten verläuft. Antwort: $a = -1$, $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Man legt den Bogen so ins Koordinatensystem, dass die Fußpunkte bei $x = 0$ und $x = 16$ liegen. Die Nullstellenform lautet dann $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 16)$ (1 P.). Wegen der Symmetrie liegt der Scheitel in der Mitte bei $x = 8$ und hat die Höhe 8: $f(8) = a \cdot 8 \cdot (-8) = -64a = 8$, also $a = -\frac{1}{8}$ (1 P.). Ausmultipliziert: $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2x$ (1 P.). Das negative a passt, denn der Bogen ist nach unten geöffnet.
b) 4 m vom linken Rand entfernt bedeutet $x = 4$: $f(4) = -\frac{1}{8} \cdot 16 + 2 \cdot 4 = -2 + 8 = 6$ (1 P.). Wegen der Symmetrie gilt dasselbe am rechten Rand bei $x = 12$: $f(12) = -18 + 24 = 6$. Antwort: $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2x$; in 4 m Abstand vom Rand ist der Bogen 6 m hoch.