Lernzettel - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Der Bogen der Brücke

Der Bogen einer Fußgängerbrücke, der Querschnitt einer Wasserrinne, die Höhenkurve einer Achterbahn und das Volumen einer Schachtel in Abhängigkeit von der Schnitttiefe: Alle diese Kurven lassen sich durch Funktionen der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ beschreiben. Man nennt sie **ganzrationale Funktionen** oder **Polynomfunktionen**. In diesem Kapitel lernst du, ihr Verhalten für große x vorherzusagen, ihre Nullstellen systematisch zu finden und aus Eigenschaften eine passende Funktionsgleichung aufzustellen.

Was sind ganzrationale Funktionen?

Eine **ganzrationale Funktion** (Polynomfunktion) vom Grad n hat die Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Die Zahlen a_i heißen Koeffizienten, a_n ist der **Leitkoeffizient**, $a_0 = f(0)$ das Absolutglied und der y-Achsenabschnitt. Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle. Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$, der Graph ist ohne Sprünge und Knicke gezeichnet.

Verhalten im Unendlichen

Für sehr große $|x|$ bestimmt allein der Term mit der höchsten Potenz das Verhalten. Es kommt auf den Grad n und das Vorzeichen des Leitkoeffizienten a_n an:

	$a_n > 0$	a_n
n gerade	$x \to \pm\infty:\ f(x) \to +\infty$	$x \to \pm\infty:\ f(x) \to -\infty$
n ungerade	$x \to +\infty:\ f \to +\infty$, $x \to -\infty:\ f \to -\infty$	$x \to +\infty:\ f \to -\infty$, $x \to -\infty:\ f \to +\infty$

Beispiel: $f(x) = -2x^3 + x$ hat Grad 3 und Leitkoeffizient -2. Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\infty$, für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.

Nullstellen bestimmen

Ausklammern: $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$ hat die Nullstellen $x = 0$ (doppelt) und $x = 3$.

Substitution bei Funktionen mit nur geraden Exponenten (biquadratische Gleichung): $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Setze $z = x^2$: $z^2 - 5z + 4 = 0$, also $z_1 = 1$ und $z_2 = 4$. Rücksubstitution: $x = \pm 1$ und $x = \pm 2$. Ergibt sich für z ein negativer Wert, gibt es dazu keine reelle Lösung.

Polynomdivision bei Grad 3 und höher: Rate eine Nullstelle x_1 (probiere Teiler des Absolutglieds), dividiere durch $(x - x_1)$ und löse die verbleibende quadratische Gleichung.

Linearfaktorzerlegung und Vielfachheit

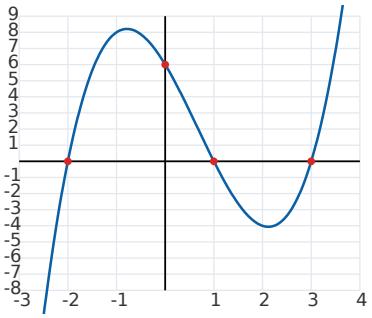
Hat f die Nullstellen $x_1, \ldots, x_k$, so gilt $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)$. Kommt ein Faktor $(x - x_0)^m$ vor, heißt x_0 **m-fache Nullstelle**. Bei geradem m berührt der Graph die x-Achse nur (kein Vorzeichenwechsel), bei ungeradem m schneidet er sie (Vorzeichenwechsel). Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Symmetrie

Treten nur gerade Exponenten auf, ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, treten nur ungerade Exponenten auf (ohne Absolutglied), ist er punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiel: Polynomdivision Schritt für Schritt

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Das Absolutglied 6 hat die Teiler $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Probe: $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$, also ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle. Division: $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$. Rechnung: $x^3 : x = x^2$; $x^2(x - 1) = x^3 - x^2$; Rest $-x^2 - 5x$; $-x^2 : x = -x$; $-x(x - 1) = -x^2 + x$; Rest $-6x + 6$; $-6x : x = -6$; $-6(x - 1) = -6x + 6$; Rest 0. Aus $x^2 - x - 6 = 0$ folgt $x = 3$ oder $x = -2$. Also $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.



Der Graph schneidet die x-Achse bei -2, 1 und 3 und die y-Achse bei 6. Er kommt von links unten und geht nach rechts oben, passend zu Grad 3 und $a_3 = 1 > 0$.

Beispiel: Funktionsgleichung aufstellen

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit den Nullstellen -1, 2, 3, die durch $P(0 \mid 12)$ geht. Ansatz $f(x) = a(x + 1)(x - 2)(x - 3)$. Aus $f(0) = a \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) = 6a = 12$ folgt $a = 2$. Ausmultipliziert $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$.

Warum ist das wichtig?

Ganzrationale Funktionen sind die Funktionen, mit denen du in der Oberstufe am häufigsten rechnest. Sie lassen sich leicht ableiten und integrieren, und mit ihnen modellierst du viele Vorgänge: Gewinnfunktionen, Brückenbögen, Volumina von Verpackungen oder Wege von Körpern. Wer Nullstellen sicher bestimmen kann, hat die halbe Kurvendiskussion bereits geschafft, denn Nullstellen teilen den Graphen in Abschnitte, in denen der Funktionswert ein festes Vorzeichen hat.

Beispiel (Vorzeichen zwischen Nullstellen). Für $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$ liegen

die Nullstellen bei -2, 1 und 3. Für sehr große x ist $f(x) > 0$. Bei jeder einfachen Nullstelle wechselt das Vorzeichen: Auf $]3;\infty[$ ist $f > 0$, auf $]1;3[$ ist f, auf $]-2;1[$ ist $f > 0$ und auf $]-\infty;-2[$ ist f. Das passt zum Graphen oben.

Strategie für Nullstellen

Gehe immer in dieser Reihenfolge vor: Zuerst prüfst du, ob du x ausklammern kannst. Danach schaust du, ob nur gerade Exponenten auftreten und eine Substitution möglich ist. Erst dann raten und dividierst du. Bei Textaufgaben interessieren dich meist nur Lösungen im sinnvollen Definitionsbereich. Notiere deshalb am Ende immer, welche Lösungen zur Aufgabe passen und welche nicht.

Noch ein Hinweis zur Polynomdivision: Sie funktioniert nur, wenn du wirklich durch einen Linearfaktor $(x - x_1)$ mit einer echten Nullstelle teilst. Geht die Division nicht ohne Rest auf, war die geratene Zahl keine Nullstelle, und du hast dich verrechnet oder musst einen anderen Wert probieren. Fehlt im Polynom eine Potenz, schreibst du sie mit Koeffizient 0 hin, zum Beispiel $x^3 + 0x^2 - 7x + 6$, damit die Spalten in der Rechnung stimmen.

Definition: Ganzrationale Funktion

Eine Funktion der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ heißt **ganzrationale Funktion vom Grad** n. Die Zahl a_n ist der **Leitkoeffizient**, $a_0 = f(0)$ der **y-Achsenabschnitt**. Ein Summand $a_k x^k$ heißt **Glied**.

Satz: Verhalten im Unendlichen

Für große Beträge von x bestimmt das Glied mit der höchsten Potenz das Verhalten. Bei **geradem** Grad haben beide Enden des Graphen dieselbe Richtung (für $a_n > 0$ beide nach oben, für a_n beide nach unten). Bei **ungeradem** Grad haben sie entgegengesetzte Richtung (für $a_n > 0$ kommt der Graph von links unten und geht nach rechts oben, für a_n umgekehrt).

Satz: Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat eine ganzrationale Funktion vom Grad n höchstens n Nullstellen. Bei ungeradem Grad gibt es mindestens eine Nullstelle, weil die Enden auf verschiedenen Seiten der x-Achse liegen.

So gehst du vor: Nullstellen ganzrationaler Funktionen finden

1. Gemeinsamen Faktor ausklammern, zum Beispiel x oder x^2 (liefert Nullstelle 0).
2. Im Restterm vom Typ $x^4 + px^2 + q$ die Substitution $z = x^2$ verwenden und die quadratische Gleichung in z lösen.
3. Bei Grad 3 oder höher eine Nullstelle durch Ausprobieren der Teiler des Absolutglieds suchen (zum Beispiel $\pm 1, \pm 2, \pm 3$).
4. Mit Polynomdivision den gefundenen Linearfaktor abspalten und die

verbleibende quadratische Gleichung lösen.
5. Alle Nullstellen angeben und mit dem Graphen vergleichen.

Beispiel 5

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Mit $z = x^2$ entsteht $z^2 - 5z + 4 = 0$, also $z = 1$ oder $z = 4$. Rücksubstitution: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ und $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Die vier Nullstellen sind $-2, -1, 1, 2$; der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Beispiel 6

Zerlege $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ in Linearfaktoren.

Probieren: $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$, also ist $x = 1$ eine Nullstelle. Polynomdivision: $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$. Die quadratische Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$ hat die Lösungen $x = 3$ und $x = -2$. Also gilt $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

Definition: Vielfachheit einer Nullstelle

Kommt der Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Zerlegung genau k-mal vor, heißt x_0 eine **Nullstelle der Vielfachheit** k. Bei ungerader Vielfachheit wechselt der Graph das Vorzeichen (er **schneidet** die Achse), bei gerader Vielfachheit berührt er die Achse nur (er **berührt**). Bei $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ berührt der Graph die Achse bei $x = 1$ und schneidet sie bei $x = -2$.

Achtung

Beim Ausklammern darfst du nie durch x **teilen**, sonst verlierst du die Nullstelle $x = 0$. Statt $x^3 = 4x \mid : x$ rechnest du $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0$ und erhältst drei Nullstellen. Bei der Substitution musst du nach dem Lösen für z **zurücksubstituieren**: Negative z-Werte liefern keine Lösung für x, da x^2 nicht negativ ist. Bei der Polynomdivision müssen alle Potenzen, auch fehlende, mit dem Koeffizienten 0 mitgeführt werden.

So gehst du vor: Funktionsgleichung aufstellen

1. Wähle den Ansatz passend zu den Informationen: Bei bekannten Nullstellen $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots$, bei Symmetrie nur gerade bzw. ungerade Potenzen.
2. Übersetze jede Information (Punkte, Steigungen, Extrempunkte) in eine Gleichung für die Unbekannten.
3. Löse das Gleichungssystem.
4. Prüfe das Ergebnis an allen gegebenen Bedingungen.

Beispiel 7

Der Bogen einer Brücke ist 20 m breit und in der Mitte 6 m hoch. Bestimme die Parabel und die Höhe 5 m vom Rand.

Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 20$: $f(x) = a\,x(x-20)$. Scheitel bei $x = 10$: $f(10) = a \cdot 10 \cdot (-10) = -100a = 6 \Rightarrow a = -0{,}06$. Also $f(x) = -0{,}06x^2 + 1{,}2x$. Bei $x = 5$: $f(5) = -0{,}06 \cdot 5 \cdot (-15) = 4{,}5$ m.

Beispiel 8

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ und beschreibe den Verlauf des Graphen.

Die Teiler von 12 sind die Kandidaten. Es gilt $f(3) = 27 - 27 - 12 + 12 = 0$. Die Polynomdivision ergibt $f(x) = (x-3)(x^2-4) = (x-3)(x-2)(x+2)$. Die Nullstellen sind -2, 2 und 3, alle einfach, der Graph schneidet die Achse also dreimal. Wegen des Leitkoeffizienten 1 und des ungeraden Grades kommt er von links unten, steigt bis zu einem Hochpunkt zwischen -2 und 2, fällt bis zu einem Tiefpunkt zwischen 2 und 3 und steigt dann nach rechts oben. Die Skizze genügt, um die Lage der Extrempunkte grob zu erkennen.

Merke: Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen

Enthält f nur Glieder mit **geraden** Exponenten (auch die Konstante), ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse. Enthält f nur Glieder mit **ungeraden** Exponenten, ist er punktsymmetrisch zum Ursprung. Das Wissen spart dir Rechenarbeit: Bei einer geraden Funktion genügt es, die Nullstellen mit $x > 0$ zu bestimmen, die negativen folgen durch Spiegelung.

Hinweis: Ausprobieren mit Köpfchen

Eine ganzzahlige Nullstelle von $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ist immer ein Teiler des Absolutglieds c. Für $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ kommen also nur $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ infrage. Das reduziert das Raten auf wenige Versuche. Hat die Funktion einen führenden Koeffizienten $\neq 1$, können auch Brüche als Nullstellen auftreten.

Wusstest du?

Die Nullstellen von Gleichungen dritten und vierten Grades fand man im 16. Jahrhundert in Italien (Cardano, Tartaglia, Ferrari). Für Gleichungen ab dem fünften Grad gibt es nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802–1829) keine allgemeine Lösungsformel mit Wurzeln mehr. Computerprogramme berechnen solche Nullstellen daher näherungsweise.

Häufige Fehler

- Bei der Substitution nach der Lösung für z die Rücksubstitution $x = \pm\sqrt{z}$ vergessen.

- Beim Ausklammern von x^2 die doppelte Nullstelle $x = 0$ übersehen.
- In der Polynomdivision Vorzeichenfehler beim Subtrahieren: Klammern setzen.
- Den Grad aus einem Produkt nicht addieren: $(x+1)(x-2)(x-3)$ hat Grad 3.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ganzrationale Funktion vom Grad n: $a_n x^n + \cdots + a_0$; Leitkoeffizient a_n, y-Achsenabschnitt a_0.
- Verhalten für $x \to \pm\infty$ bestimmt das Glied mit der höchsten Potenz: gerade Grade gleiche Enden, ungerade entgegengesetzte.
- Nullstellen: ausklammern, Substitution $z = x^2$, Teiler des Absolutglieds probieren, Polynomdivision.
- Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen; bei ungeradem Grad mindestens eine.
- Linearfaktorzerlegung: $f(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdots$; ungerade Vielfachheit: Vorzeichenwechsel, gerade: Berührung.
- Symmetrie: nur gerade Exponenten $\Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse, nur ungerade $\Rightarrow$ punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Funktionsgleichung aufstellen: Ansatz wählen, Bedingungen in Gleichungen übersetzen, Gleichungssystem lösen, Probe.
- Beim Ausklammern nie durch x teilen, sonst geht die Nullstelle 0 verloren.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Mach nach jeder Polynomdivision die Probe, indem du $(x - x_1)$ mit dem Ergebnis wieder multiplizierst. Du musst dann genau das Ausgangspolynom erhalten. In der Klausur lohnt sich diese Kontrolle immer.