Arbeitsblatt - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Grad, Leitkoeffizient, y-Achsenabschnitt

Gib Grad, Leitkoeffizient und y-Achsenabschnitt an.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$
b) $g(x) = -5x^3 + x$
c) $h(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 - 4$
d) $k(x) = (x - 2)(x + 3)$ (erst ausmultiplizieren)

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Verhalten im Unendlichen

Beschreibe das Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

a) $f(x) = -2x^3 + x$
b) $g(x) = x^4 - 5x^2$
c) $h(x) = -x^4 + 3x$
d) $k(x) = 0{,}5x^5 - x^2$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Nullstellen durch Ausklammern

Bestimme alle Nullstellen, indem du ausklammerst und faktorisierst.

a) $f(x) = x^3 - 4x$
b) $g(x) = 2x^4 - 8x^2$
c) $h(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$
d) $k(x) = x^3 + 3x^2$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Substitution

Löse mit der Substitution $z = x^2$ und gib alle reellen Nullstellen an.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 2 = 0$
d) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Aus den Nullstellen die Funktion

Eine Funktion dritten Grades hat die Nullstellen -1, 2 und 4 und den Leitkoeffizienten 1.

a) Stelle die Linearfaktorform auf.
b) Multipliziere aus und gib die Normalform an.
c) Berechne den y-Achsenabschnitt.
d) Zeichne eine Skizze: Wie verläuft der Graph für x und $x > 4$?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Vielfachheit und Verlauf

Gegeben ist $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

a) Gib die Nullstellen mit Vielfachheit an.
b) Wie verläuft der Graph an den Nullstellen (schneiden oder berühren)?
c) Berechne den y-Achsenabschnitt.
d) Multipliziere aus und gib den Grad an.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Polynomdivision (1)

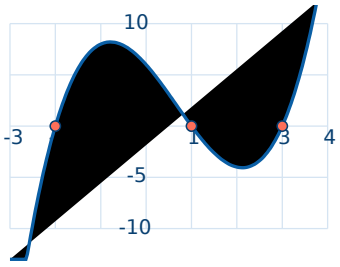
Gegeben ist $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Es gilt $f(1) = 0$.

a) Führe die Polynomdivision $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1)$ durch.
b) Löse die verbleibende quadratische Gleichung.
c) Gib die Linearfaktorzerlegung an.
d) Prüfe durch Einsetzen von $x = 3$.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Polynomdivision (2)

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Eine Nullstelle ist $x = 3$.



a) Bestätige $f(3) = 0$.
b) Führe die Polynomdivision durch.
c) Bestimme die übrigen Nullstellen.

d) Lies die Nullstellen am Graphen ab und vergleiche.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Symmetrie

Untersuche, welche Symmetrie vorliegt, ohne $f(-x)$ auszurechnen.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
b) $g(x) = x^3 - x$
c) $h(x) = x^3 + x^2$
d) $k(x) = 5$

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Parabel aus drei Punkten

Der Graph einer Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ geht durch $A(0\,|\,3)$, $B(1\,|\,0)$ und $C(3\,|\,0)$.

a) Bestimme c aus A.
b) Stelle die Gleichungen für B und C auf und löse.
c) Gib die Normal- und die Linearfaktorform an.
d) Berechne den Scheitel.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Aus Nullstellen und einem Punkt

Eine Funktion dritten Grades hat die Nullstellen -2, 0 und 2, und der Punkt $P(1\,|\,-3)$ liegt auf dem Graphen.

a) Stelle den Ansatz $f(x) = a\,x(x-2)(x+2)$ auf.
b) Bestimme a mit $f(1) = -3$.
c) Gib die Normalform an.
d) Welche Symmetrie hat der Graph?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Brückenbogen

Eine Brücke über einen Bach hat einen parabelförmigen Bogen. Die Spannweite beträgt 20 m, die Scheitelhöhe 6 m.

a) Lege das Koordinatensystem so, dass die Brücke an den Nullstellen 0 und 20 aufliegt, und stelle f auf.
b) Berechne die Höhe in 5 m Abstand vom linken Rand.
c) In welchem Bereich ist der Bogen mindestens 5 m hoch?
d) Ein Boot ist $4{,}2$ m hoch. Wie breit ist der Streifen, in dem es unter dem Bogen hindurchfahren kann?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Die Schachtel aus Karton

Aus einem rechteckigen Karton (20 cm $\times$ 14 cm) werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge x herausgeschnitten, dann werden die Ränder zu einer Schachtel hochgefaltet.

a) Stelle das Volumen $V(x)$ auf und gib die Nullstellen an.
b) Berechne $V(2)$ und $V(3)$.
c) Gib den sinnvollen Definitionsbereich an.
d) Ermittle mit $V'(x) = 0$ die günstigste Schnitttiefe.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Nullstellen eingrenzen

Von $f(x) = x^3 - 3x + 1$ liegt die folgende Wertetabelle vor.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

a) Prüfe die Tabelle durch Rechnung für $x = -2$ und $x = 2$.
b) In welchen Intervallen liegen Nullstellen? Begründe mit dem Vorzeichenwechsel.
c) Wie viele Nullstellen hat f höchstens?
d) Grenze eine Nullstelle im Intervall $[1;2]$ durch Halbieren auf eine Dezimalstelle ein.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Differenzen verraten den Grad

Von einer ganzrationalen Funktion kennt man die Werte.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	9	28

a) Berechne die ersten Differenzen der Funktionswerte.
b) Berechne die zweiten und dritten Differenzen.
c) Welchen Grad hat die Funktion vermutlich? Begründe.
d) Bestimme f aus dem Ansatz $f(x) = ax^3 + 1$.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Gewinn eines Betriebs

Der Gewinn einer Schreinerei (in Tausend Euro) hängt von der Zahl x der produzierten Möbel (in Hundert) ab: $G(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$, $0 \le x \le 8$.

a) Bestimme die Nullstellen von G.
b) In welchem Bereich arbeitet der Betrieb mit Gewinn?
c) Bestimme die Produktionsmenge mit maximalem Gewinn und die Höhe des Gewinns.

d) Was bedeutet das lokale Minimum bei $x = 1$?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Raten und Teilen

Zerlege $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ vollständig.

a) Welche Zahlen kommen als ganzzahlige Nullstellen infrage (Teiler von 12)?
b) Finde eine Nullstelle durch Probieren.
c) Führe die Polynomdivision durch.
d) Gib alle Nullstellen und die Linearfaktorzerlegung an.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Eigenschaften führen zur Funktion

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat bei $x = 2$ eine Nullstelle, und der Graph geht durch $P(1 \mid -3)$.

a) Wähle den Ansatz aufgrund der Symmetrie.
b) Stelle zwei Gleichungen auf.
c) Löse das Gleichungssystem.
d) Bestimme alle Nullstellen.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Wie viele Nullstellen?

Gib für jede Funktion die Anzahl der reellen Nullstellen an und begründe.

a) $f(x) = x^4 + 1$
b) $g(x) = x^3$
c) $h(x) = x^5 - x$
d) $k(x) = x^3 - 3x + 2$

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Summe und Produkt der Nullstellen

Für $x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen x_1, x_2 gilt der Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

a) Bestimme die Nullstellen von $x^2 - 7x + 12$ durch Raten mit Vieta.
b) Zeige $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ durch Ausmultiplizieren.
c) Bestimme eine quadratische Gleichung mit den Lösungen -1 und 5.