Lösungen - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) Grad 4, Leitkoeffizient 3, y-Achsenabschnitt 7.
b) Grad 3, Leitkoeffizient -5, y-Achsenabschnitt 0.
c) Grad 5, Leitkoeffizient $\frac{1}{2}$, y-Achsenabschnitt -4.
d) $k(x) = x^2 + x - 6$: Grad 2, Leitkoeffizient 1, y-Achsenabschnitt -6.
Merke: Der Grad ist der höchste Exponent, der Leitkoeffizient die Zahl vor dieser Potenz. Den y-Achsenabschnitt erhält man als $f(0)$; er ist das Absolutglied ohne x. Bei Produkten wie d) muss man zuerst ausmultiplizieren, um diese Angaben ablesen zu können.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Ungerader Grad, a: $x \to +\infty \Rightarrow f \to -\infty$; $x \to -\infty \Rightarrow f \to +\infty$.
b) Gerader Grad, $a > 0$: beide Enden nach $+\infty$.
c) Gerader Grad, a: beide Enden nach $-\infty$.
d) Ungerader Grad, $a > 0$: $x \to +\infty \Rightarrow k \to +\infty$; $x \to -\infty \Rightarrow k \to -\infty$.
Begründung: Für große $|x|$ bestimmt allein der Summand mit dem höchsten Exponenten den Verlauf, alle anderen werden im Vergleich unbedeutend. Bei geradem Grad zeigen beide Enden in dieselbe Richtung, bei ungeradem Grad in entgegengesetzte; das Vorzeichen des Leitkoeffizienten legt die Richtung fest.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 0; 2\}$.
b) $2x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ (doppelt), $x = \pm 2$.
c) $x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x \in \{0; 2; 3\}$.
d) $x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0$ (doppelt), $x = -3$.
Merke: Fehlt das Absolutglied, kann man immer eine Potenz von x ausklammern. Danach hilft der Satz vom Nullprodukt: Ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist. Ausgeklammertes x^2 liefert eine doppelte Nullstelle bei 0.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = 1, 4 \Rightarrow x = \pm 1, \pm 2$.
b) $z^2 - 13z + 36 = 0 \Rightarrow z = 4, 9 \Rightarrow x = \pm 2, \pm 3$.
c) $z^2 + z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1$ oder $z = -2$; nur $z = 1$ liefert $x = \pm 1$.
d) $z^2 + 4z + 3 = 0 \Rightarrow z = -1, -3$: beide negativ, es gibt keine reelle Nullstelle.
Begründung: Bei einer biquadratischen Gleichung kommen nur x^4 und x^2 vor. Mit $z = x^2$ entsteht eine quadratische Gleichung. Bei der Rücksubstitution liefert jedes positive z zwei Lösungen $\pm\sqrt{z}$, ein negatives z dagegen keine reelle Lösung, weil

Quadrate nie negativ sind.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$.
b) $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$; $(x^2 - x - 2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.
c) $f(0) = 1 \cdot (-2) \cdot (-4) = 8$.
d) Für x liegt der Graph unterhalb der Achse, für $x > 4$ oberhalb (ungerader Grad, positiver Leitkoeffizient).
Merke: Aus den Nullstellen x_1, x_2, x_3 und dem Leitkoeffizienten a erhält man direkt $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Probe: $f(2) = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$. Zwischen -1 und 2 liegt der Graph oberhalb der Achse, zwischen 2 und 4 unterhalb.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $x = 1$ doppelt, $x = -2$ einfach.
b) Bei $x = 1$ (gerade Vielfachheit) berührt der Graph die Achse, bei $x = -2$ schneidet er sie.
c) $f(0) = 1 \cdot 2 = 2$.
d) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, Grad 3.
Begründung: Bei einer Nullstelle gerader Vielfachheit wechselt der Faktor $(x-1)^2$ sein Vorzeichen nicht, deshalb berührt der Graph die Achse nur. Bei einfacher Vielfachheit wechselt das Vorzeichen, und der Graph schneidet die Achse. Der Punkt $(1 \mid 0)$ ist hier ein Tiefpunkt.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $x^3 : x = x^2$; $x^2(x-1) = x^3 - x^2$; Rest $-5x^2 + 11x$. $-5x^2 : x = -5x$; $-5x(x-1) = -5x^2 + 5x$; Rest $6x - 6$. $6x : x = 6$; $6(x-1) = 6x - 6$; Rest 0. Ergebnis: $x^2 - 5x + 6$.
b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ oder $x = 3$.
c) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
d) $f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$.
Merke: Kennt man eine Nullstelle x_0, lässt sich $f(x)$ ohne Rest durch $(x - x_0)$ teilen. Das Ergebnis hat einen um eins kleineren Grad. Die übrigen Nullstellen findet man dann mit der Lösungsformel. Ein Rest ungleich null wäre ein Hinweis auf einen Rechenfehler.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $f(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$.
b) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-3) = x^2 + x - 2$, denn $(x-3)(x^2 + x - 2) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
c) $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = -2$.
d) Die Punkte $(-2 \mid 0)$, $(1 \mid 0)$ und $(3 \mid 0)$ liegen auf der x-Achse, wie im Bild.
Begründung: Der Rest der Polynomdivision ist 0, das bestätigt, dass 3 eine Nullstelle

ist. Die Probe durch Ausmultiplizieren ist schneller als das Nachrechnen der Division.
Antwort: Die Nullstellen sind -2, 1 und 3, also gilt $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Nur gerade Exponenten (und die Konstante): achsensymmetrisch zur y-Achse.
b) Nur ungerade Exponenten: punktsymmetrisch zum Ursprung.
c) Gemischte Exponenten: weder noch.
d) Konstante Funktion: achsensymmetrisch zur y-Achse (Exponent 0 ist gerade).
Merke: Bei ganzrationalen Funktionen genügt ein Blick auf die Exponenten. Die Konstante zählt als x^0 und hat damit einen geraden Exponenten. Deshalb ist $x^3 - x + 1$ zum Beispiel nicht punktsymmetrisch zum Ursprung, wohl aber zum Punkt $(0\,|\,1)$.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $f(0) = c = 3$.
b) $a + b + 3 = 0$ und $9a + 3b + 3 = 0$. Aus der ersten: $b = -a - 3$; eingesetzt: $9a - 3a - 9 + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$, $b = -4$.
c) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.
d) $x_S = 2$, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$: $S(2\,|\,-1)$.
Begründung: Jeder Punkt liefert eine Gleichung; drei Punkte bestimmen die drei Unbekannten a, b und c eindeutig. Da B und C Nullstellen sind, hätte man auch den Ansatz $a(x-1)(x-3)$ wählen und a mit A bestimmen können. Der Scheitel liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Wegen der Nullstellen ist der Ansatz $f(x) = a\,x(x-2)(x+2) = a(x^3 - 4x)$.
b) $f(1) = a \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 = -3a = -3 \Rightarrow a = 1$.
c) $f(x) = x^3 - 4x$.
d) Nur ungerade Exponenten: punktsymmetrisch zum Ursprung.
Begründung: Der Ansatz mit Linearfaktoren enthält die drei Nullstellen schon; nur der Streckfaktor a ist offen. Ihn bestimmt man mit dem zusätzlichen Punkt. Probe: $f(1) = 1 - 4 = -3$. Die Symmetrie passt auch zu den Nullstellen -2, 0, 2, die symmetrisch zum Ursprung liegen.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $f(x) = a\,x(x-20)$; $f(10) = -100a = 6 \Rightarrow a = -0{,}06$; also $f(x) = -0{,}06x^2 + 1{,}2x$.
b) $f(5) = -1{,}5 + 6 = 4{,}5$ m.
c)
$-0{,}06x^2 + 1{,}2x \geq 5 \Rightarrow x^2 - 20x + \frac{250}{3} \leq 0 \Rightarrow x = 10 \pm \sqrt{100 - \frac{250}{3}} = 10 \pm \sqrt{\frac{50}{3}} \approx 10 \pm 4{,}08$
; also von $5{,}92$ m bis $14{,}08$ m.
d) $-0{,}06x^2 + 1{,}2x = 4{,}2 \Rightarrow x^2 - 20x + 70 = 0 \Rightarrow x = 10 \pm \sqrt{30} \approx 10 \pm 5{,}48$; Breite $2\sqrt{30} \approx 11{,}0$ m.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $V(x) = x(20-2x)(14-2x) = 4x^3 - 68x^2 + 280x$; Nullstellen 0; 7; 10.
b) $V(2) = 2 \cdot 16 \cdot 10 = 320\,\text{cm}^3$; $V(3) = 3 \cdot 14 \cdot 8 = 336\,\text{cm}^3$.
c) 0, weil die kürzere Seite nur 14 cm lang ist.
d) $V'(x) = 12x^2 - 136x + 280 = 0 \Rightarrow x = \frac{136 \pm \sqrt{5056}}{24} \approx 2{,}70$ bzw. $8{,}63$; nur $x \approx 2{,}70$ liegt im Definitionsbereich, $V(2{,}7) \approx 339\,\text{cm}^3$.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$ und $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$. Beide Tabellenwerte stimmen.
b) f ist als ganzrationale Funktion stetig. Wechselt das Vorzeichen zwischen zwei Stellen, muss dazwischen eine Nullstelle liegen. Das ist in $]-2;-1[$ (von -1 zu 3), in $]0;1[$ (von 1 zu -1) und in $]1;2[$ (von -1 zu 3) der Fall.
c) Eine Funktion dritten Grades hat höchstens drei Nullstellen. Da wir drei Intervalle mit Vorzeichenwechsel gefunden haben, sind es genau drei.
d) $f(1{,}5) = -0{,}125$ und $f(1{,}6) = 0{,}296 > 0$, also liegt die Nullstelle in $]1{,}5;1{,}6[$. Weiter halbiert: $f(1{,}55) \approx 0{,}074 > 0$, die Nullstelle liegt in $]1{,}5;1{,}55[$. Auf eine Dezimalstelle gerundet ist sie $1{,}5$ (genauer etwa $1{,}53$).

Lösung zu Aufgabe 15

a) Erste Differenzen: 1; 7; 19.
b) Zweite Differenzen: 6; 12. Dritte Differenz: 6.
c) Die dritten Differenzen sind konstant: Grad 3 (bei Grad n sind die n-ten Differenzen konstant).
d) $f(1) = a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$; $f(x) = x^3 + 1$; Probe $f(3) = 28$.
Merke: Bei Funktionswerten an gleichabständigen Stellen sind bei einer Funktion vom Grad n die n-ten Differenzen konstant. So erkennt man den Grad schon aus einer Tabelle. Die Probe mit allen Werten bestätigt $f(x) = x^3 + 1$: 1, 2, 9, 28.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $G(x) = -x(x^2 - 9x + 15) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2} \approx 2{,}21$ bzw. $6{,}79$.
b) Gewinn für $2{,}21$, also bei etwa 221 bis 679 Möbeln.
c) $G'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x-1)(x-5)$; Maximum bei $x = 5$:
$G(5) = -125 + 225 - 75 = 25$, also *25\,000\,€* bei 500 Möbeln.
d) $G(1) = -7$: Bei 100 Möbeln ist der Verlust lokal am größten (*7000\,€*), danach steigt der Gewinn mit der Menge an.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Teiler von 12: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.
b) $f(3) = 27 - 27 - 12 + 12 = 0$: $x = 3$ ist Nullstelle.
c) $(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 3) = x^2 - 4$, denn $(x-3)(x^2-4) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

d) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Nullstellen $-2, 2, 3$; $f(x) = (x+2)(x-2)(x-3)$.
Merke: Hat eine ganzrationale Funktion ganzzahlige Koeffizienten und den Leitkoeffizienten 1, dann sind ganzzahlige Nullstellen Teiler des Absolutglieds. Man probiert die Teiler der Reihe nach aus. Man hätte hier auch durch Gruppieren faktorisieren können: $x^2(x-3) - 4(x-3)$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Punktsymmetrie: nur ungerade Exponenten, $f(x) = ax^3 + bx$.
b) $f(2) = 8a + 2b = 0$ und $f(1) = a + b = -3$.
c) Aus der zweiten: $b = -3 - a$; eingesetzt $8a - 6 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$, $b = -4$; $f(x) = x^3 - 4x$.
d) $x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 2$.
Begründung: Punktsymmetrie zum Ursprung erlaubt nur ungerade Exponenten, deshalb fallen x^2 und die Konstante im Ansatz weg. So bleiben zwei Unbekannte, und zwei Bedingungen reichen aus. Probe: $f(2) = 8 - 8 = 0$ und $f(1) = 1 - 4 = -3$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Keine: $x^4 \geq 0$, also $f(x) \geq 1$.
b) Genau eine (dreifache): $x = 0$.
c) $x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)$: drei Nullstellen $0, \pm 1$.
d) $k(1) = 0$; $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$: Nullstellen 1 (doppelt) und -2; zwei verschiedene Nullstellen.
Merke: Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen; mehrfache Nullstellen zählen dabei nur einmal als Stelle. Bei geradem Grad kann es gar keine Nullstelle geben, bei ungeradem Grad immer mindestens eine, weil die beiden Enden des Graphen in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Gesucht sind Zahlen mit Summe 7 und Produkt 12: 3 und 4.
b) $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + px + q$ mit $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 x_2$.
c) $(x+1)(x-5) = x^2 - 4x - 5$.
Begründung: Der Satz von Vieta folgt direkt aus der Linearfaktorzerlegung. Probe zu c): Die Summe der Lösungen ist $-1 + 5 = 4 = -p$, das Produkt $-5 = q$. Jede Vielfache $a(x^2 - 4x - 5) = 0$ mit $a \neq 0$ hat dieselben Lösungen.