Lösungen zur Klassenarbeit - Funktionen und ihre Eigenschaften

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Beim Einsetzen negativer Zahlen setzt man Klammern: $f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$ (1 P.). $f(0) = 0 - 0 - 3 = -3$; dieser Wert ist zugleich der y-Achsenabschnitt, der Graph schneidet die y-Achse in $(0|-3)$ (1 P.).
b) Nullstellen: $x^2 - 2x - 3 = 0$. pq-Formel mit $p = -2$, $q = -3$: $x = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2$, also $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ (1 P.). Probe durch Faktorisieren: $(x - 3)(x + 1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$, stimmt (1 P.). Der Scheitel liegt genau in der Mitte der Nullstellen bei $x = 1$, mit $f(1) = -4$. Häufiger Fehler in a): $-2^2 = -4$ statt $(-2)^2 = 4$ rechnen. Antwort: $f(-2) = 5$, $f(0) = -3$, Nullstellen -1 und 3.

Lösung zu Aufgabe 2 (3 BE/Punkte)

Der größtmögliche Definitionsbereich enthält alle reellen Zahlen, für die der Term berechnet werden kann.
a) Durch null darf man nicht teilen. Der Nenner $x + 4$ wird null für $x = -4$; diese Stelle muss ausgeschlossen werden: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ (1 P.). Dort besitzt der Graph eine senkrechte Asymptote.
b) Unter einer Quadratwurzel darf keine negative Zahl stehen: $2x - 6 \geq 0$ (1 P.). Umformen: $2x \geq 6$, also $x \geq 3$. $D_g = [3; \infty[$ (1 P.). Die Grenze $x = 3$ gehört dazu, weil $\sqrt{0} = 0$ definiert ist. Probe: $g(3) = 0$, aber $g(2) = \sqrt{-2}$ existiert nicht. Antwort: D_f alle reellen Zahlen außer -4; D_g alle Zahlen ab 3.

Lösung zu Aufgabe 3 (3 BE/Punkte)

Achsensymmetrie zur y-Achse liegt vor, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle x gilt; Punktsymmetrie zum Ursprung, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.
a) $f(-x) = (-x)^3 - 5 \cdot (-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x) = -f(x)$ (1 P.). Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Das passt dazu, dass nur ungerade Exponenten (3 und 1) vorkommen (1 P.).
b) $g(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = x^4 + 2x^2 - 1 = g(x)$. Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse; die Konstante -1 zählt als Exponent 0 und ist gerade (1 P.). Gegenbeispiel zur Kontrolle: $x^3 + 1$ hätte gemischte Exponenten und keine dieser Symmetrien. Antwort: f punktsymmetrisch zum Ursprung, g achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Schritt 1: Verschiebung um 3 nach links ersetzt x durch $x + 3$: $(x + 3)^2$. Schritt 2:

Verschiebung um 2 nach unten: $(x+3)^2-2$. Schritt 3: Spiegelung an der x-Achse kehrt das Vorzeichen des ganzen Terms um: $g(x)=-[(x+3)^2-2]=-(x+3)^2+2$ (2 P.). Die Reihenfolge ist wichtig: Erst spiegeln und dann verschieben ergäbe $-(x+3)^2-2$.
b) Der Scheitel der Normalparabel $(0|0)$ wandert zu $(-3|-2)$ und wird dann zu $S(-3|2)$ gespiegelt. Die Parabel ist nach unten geöffnet, S ist der höchste Punkt: $W=]-\infty;2]$ (1 P.).
c) $g(0)=-(0+3)^2+2=-9+2=-7$; der Graph schneidet die y-Achse in $(0|-7)$ (1 P.). Antwort: $g(x)=-(x+3)^2+2$, $S(-3|2)$, y-Achsenabschnitt -7.

Lösung zu Aufgabe 5 (6 BE/Punkte)

a) Beide Tarife sind lineare Funktionen der Monatszahl m. „Fit-Stadt“: Grundbetrag 15 € plus 25 € pro Monat, $K_1(m)=15+25m$. „Sport-Plus“: kein Grundbetrag, $K_2(m)=32m$ (2 P.).
b) $K_1(12)=15+300=315$ € und $K_2(12)=384$ €. Nach einem Jahr spart man bei „Fit-Stadt“ 69 € (1 P.).
c) „Fit-Stadt“ ist günstiger, wenn $15+25m<32m$, also $15<7m$ und $m>\frac{15}{7}\approx 2{,}14$ (1 P.). Da nur ganze Monate abgerechnet werden: ab dem 3. Monat. Kontrolle: $K_1(2)=65>64=K_2(2)$, aber $K_1(3)=90<96=K_2(3)$ (1 P.).
d) K_1 beginnt bei 15 und steigt flacher, K_2 beginnt im Ursprung und steigt steiler. Am Schnittpunkt bei $m\approx 2{,}14$ mit etwa $68{,}57$ € sind beide gleich teuer; rechts davon liegt K_1 darunter (1 P.).