Lernzettel - Funktionen und ihre Eigenschaften

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Der Taxitarif

Ein Taxi berechnet eine Grundgebühr von *3{,}50\,€* und *2\,€* für jeden gefahrenen Kilometer. Zu jeder Strecke gehört genau ein Preis, und aus dem Preis kannst du die Strecke zurückrechnen. Solche eindeutigen Zuordnungen nennt man **Funktionen**. Du kannst sie als Tabelle, als Graph, als Wortvorschrift oder als Term darstellen. In diesem Kapitel sammelst du das Handwerkszeug für die ganze Oberstufe: Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Monotonie und die Verschiebung, Streckung und Spiegelung von Graphen.

Was ist eine Funktion?

Eine Funktion f ordnet jedem Wert x aus dem **Definitionsbereich** D genau einen Wert $y = f(x)$ zu. Die Menge aller entstehenden Funktionswerte heißt **Wertebereich** W. In der Einführungsphase wiederholst du die wichtigsten Funktionstypen und lernst, ihre Eigenschaften systematisch zu beschreiben. Das ist die Grundlage für die gesamte Analysis der Oberstufe.

Wichtige Funktionstypen

- **Lineare Funktion** $f(x) = mx + b$: Gerade mit Steigung m und y-Achsenabschnitt b.
- **Quadratische Funktion** $f(x) = ax^2 + bx + c$: Parabel. Für $a > 0$ nach oben geöffnet, für a nach unten.
- **Potenzfunktionen** $f(x) = x^n$: Bei geradem n ähnlich wie die Normalparabel, bei ungeradem n ähnlich wie x^3.
- **Wurzelfunktion** $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D = [0; \infty[$.
- **Kehrwertfunktion** $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und den Asymptoten $x = 0$ und $y = 0$.

Definitionsbereich bestimmen

Du musst zwei Dinge beachten: Durch null darf nicht geteilt werden, und unter einer Wurzel darf keine negative Zahl stehen. Bei $f(x) = \sqrt{x - 3}$ muss $x - 3 \geq 0$ gelten, also $D = [3; \infty[$. Bei $g(x) = \frac{1}{x+2}$ ist $x = -2$ verboten, also $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Nullstellen

Eine Nullstelle ist eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = 0$. Dort schneidet oder berührt der Graph die x-Achse. Du löst die Gleichung $f(x) = 0$. Bei quadratischen Funktionen nutzt du Ausklammern, die Mitternachtsformel oder die Scheitelform. Ein Produkt ist null, wenn ein

Faktor null ist (Satz vom Nullprodukt).

Symmetrie

Der Graph ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Beispiel: $f(x) = x^4 - 3x^2$. Er ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Beispiel: $g(x) = x^3 + 2x$. Bei ganzrationalen Funktionen erkennst du das schnell: Kommen nur gerade Exponenten vor, liegt Achsensymmetrie vor, kommen nur ungerade Exponenten vor, liegt Punktsymmetrie vor. Eine Funktion wie $h(x) = x^2 + x$ ist keins von beiden.

Transformationen von Graphen

Ausgehend vom Graphen von f gilt:

- $f(x) + e$: Verschiebung um e in y-Richtung (nach oben für $e > 0$).
- $f(x - d)$: Verschiebung um d in x-Richtung (nach *rechts* für $d > 0$).
- $-f(x)$: Spiegelung an der x-Achse. $f(-x)$: Spiegelung an der y-Achse.
- $a \cdot f(x)$ mit $a > 0$: Streckung in y-Richtung um den Faktor a (für $a > 1$ steiler, für 0 flacher).

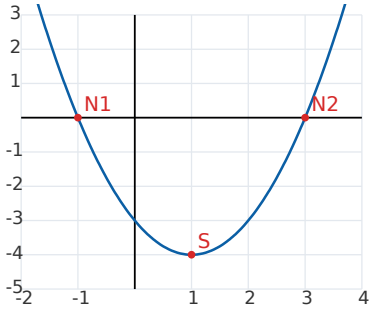
Die **Scheitelform** $f(x) = a(x - d)^2 + e$ fasst alles zusammen: Der Scheitelpunkt ist $S(d \mid e)$.

Beispiele

Beispiel 1 (Scheitelform). Gesucht ist die Scheitelform von $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Quadratische Ergänzung: $x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$. Scheitelpunkt $S(3 \mid -4)$. Nullstellen: $(x - 3)^2 = 4$, also $x - 3 = \pm 2$, das heißt $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$.

Beispiel 2 (Symmetrie). Untersuche $f(x) = x^3 - 4x$. Es gilt $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x)$. Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Nullstellen: $x(x^2 - 4) = 0$, also $x = 0$, $x = 2$ oder $x = -2$.

Beispiel 3 (Definitionsbereich und Nullstelle). $f(x) = \sqrt{x + 4} - 2$. Es muss $x + 4 \geq 0$ sein, also $D = [-4; \infty[$. Aus $\sqrt{x + 4} = 2$ folgt $x + 4 = 4$, also $x = 0$. Der Graph ist die um 4 nach links und 2 nach unten verschobene Wurzelfunktion.



Die Abbildung zeigt $f(x) = (x - 1)^2 - 4$: Scheitelpunkt $S(1 \mid -4)$, Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

Wertebereich und Monotonie

Den Wertebereich liest du am besten aus einer Skizze ab. Bei der Normalparabel $f(x) = x^2$ gilt $W = [0; \infty[$, bei $f(x) = x^2 + 2$ gilt $W = [2; \infty[$, weil der Scheitelpunkt $S(0 \mid 2)$ der tiefste Punkt ist. Bei einer nach unten geöffneten Parabel ist der Scheitelpunkt der höchste Punkt, und der Wertebereich ist nach oben beschränkt. Eine Funktion heißt **streng monoton wachsend**, wenn mit größer werdendem x auch die Funktionswerte immer größer werden. Die Normalparabel fällt für x und steigt für $x > 0$.

Funktionen im Alltag

Funktionen beschreiben Zusammenhänge: Der Preis eines Handytarifs hängt von den Minuten ab, die Höhe eines geworfenen Balls von der Zeit, der Bremsweg von der Geschwindigkeit. Wichtig ist, dass du die Variablen sinnvoll benennst und den Definitionsbereich an die Situation anpasst. Negative Zeiten oder negative Minuten ergeben im Sachzusammenhang keinen Sinn. Bei einer Wurfparabel interessiert dich nur der Bereich zwischen Abwurf und Landung, also zwischen den beiden Nullstellen.

Beispiel 4 (Sachaufgabe). Ein Stein wird geworfen, seine Höhe ist $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ in Metern. Die Landung erfolgt bei $h(t) = 0$: $-5(t^2 - 2t - 3) = 0$, also $(t - 3)(t + 1) = 0$. Nur $t = 3$ ist sinnvoll, denn $t = -1$ liegt vor dem Abwurf. Der Stein landet nach 3 Sekunden. Die Scheitelform $h(t) = -5(t - 1)^2 + 20$ zeigt: Die größte Höhe von 20 m wird nach 1 Sekunde erreicht.

Vorgehen bei Aufgaben

Lies die Aufgabe genau und markiere, was gegeben und was gesucht ist. Prüfe zuerst den Definitionsbereich. Dann berechne Nullstellen und den y-Achsenabschnitt $f(0)$, untersuche die Symmetrie und skizziere den Graphen. Zum Schluss schreibst du einen Antwortsatz mit Einheit. So bekommst du in der Klausur auch bei einem Rechenfehler noch viele Punkte für das richtige Vorgehen.

Definition: Funktion

Eine **Funktion** f ordnet jedem Element x der Definitionsmenge D genau ein Element $y = f(x)$ zu. Man schreibt $f:\ x \mapsto f(x)$. Die Menge aller Funktionswerte heißt **Wertebereich** W. Der Graph von f besteht aus allen Punkten $(x \mid f(x))$ mit $x \in D$. Jede senkrechte Gerade schneidet den Graphen höchstens einmal; das erkennt man als Eindeutigkeit der Zuordnung.

Definition: Nullstelle

Eine Zahl x_0 mit $f(x_0) = 0$ heißt **Nullstelle** von f. Der Graph schneidet oder berührt dort die x-Achse. Den **y-Achsenabschnitt** erhältst du mit $f(0)$. Bei Produkten wie $(x - 2)(x + 3)$ liest du die Nullstellen direkt ab: Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist.

So gehst du vor: Nullstellen bestimmen

1. Setze den Term gleich null: $f(x) = 0$.
2. Klammere gemeinsame Faktoren aus oder faktorisiere (Binomische Formeln, Satz von Vieta).
3. Löse quadratische Gleichungen mit der Mitternachtsformel $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ oder der pq-Formel.
4. Prüfe die Lösungen durch Einsetzen und achte auf den Definitionsbereich.

Beispiel 5

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 4x$.

Ausklammern: $x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2) = 0$. Die Nullstellen sind $x = 0$, $x = 2$ und $x = -2$. Der Graph schneidet die x-Achse an drei Stellen und ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiel 6

Bestimme den Definitionsbereich von $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

Die Wurzel verlangt $x + 2 \geq 0$, also $x \geq -2$. Der Nenner darf nicht null sein: $x \neq 1$. Es folgt $D = [-2; \infty[\setminus \{1\}$. Probe: $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{-1} \approx -1{,}41$ ist definiert, $f(1)$ nicht.

Merke: Symmetrie von Funktionsgraphen

Gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$, ist der Graph **achsensymmetrisch zur y-Achse** (Beispiel x^2, $x^4 - 3x^2$, $|x|$). Gilt $f(-x) = -f(x)$, ist der Graph **punktsymmetrisch zum Ursprung** (Beispiel x^3, $x^3 - 4x$). Bei ganzrationalen Funktionen genügt der Blick auf die Exponenten: Kommen nur gerade Exponenten vor, ist die Funktion gerade; kommen nur ungerade vor, ist sie ungerade. Eine Konstante zählt als Exponent 0 (gerade).

Satz: Verschiebung, Streckung und Spiegelung

Für die Normalparabel $f(x) = x^2$ gilt: $g(x) = (x - d)^2 + e$ entsteht durch Verschiebung um d nach rechts und um e nach oben. Der Scheitel ist $S(d \,|\, e)$. $g(x) = a\,x^2$ streckt den Graphen mit dem Faktor $|a|$ in y-Richtung; für a wird zusätzlich an der x-Achse gespiegelt. Allgemein gilt für jede Funktion f: $f(x - d) + e$ verschiebt, $a \cdot f(x)$ streckt in y-Richtung, $f(-x)$ spiegelt an der y-Achse und $-f(x)$ spiegelt an der x-Achse.

Beispiel 7

Beschreibe den Graphen von $g(x) = -2(x + 1)^2 + 3$ ausgehend von der

Normalparabel.

Die Parabel wird um 1 nach links verschoben (Scheitel bei $x = -1$), mit dem Faktor 2 gestreckt, an der x-Achse gespiegelt (nach unten geöffnet) und um 3 nach oben verschoben. Scheitel: $S(-1 \mid 3)$, Wertebereich $W =]-\infty; 3]$. Nullstellen: $(x+1)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1{,}5} \approx 0{,}22$ bzw. $-2{,}22$.

Definition: Monotonie

Eine Funktion f heißt auf einem Intervall **streng monoton steigend**, wenn aus x_1 stets $f(x_1)$ folgt, und **streng monoton fallend**, wenn aus x_1 stets $f(x_1) > f(x_2)$ folgt. Die Normalparabel fällt auf $]-\infty; 0]$ und steigt auf $[0; \infty[$. Die Funktion $f(x) = x^3$ steigt auf ganz $\mathbb{R}$.

Achtung

Zwei Fehler kommen oft vor: Bei $g(x) = (x-3)^2$ wird der Graph um 3 nach **rechts** verschoben, nicht nach links, weil der Funktionswert erst bei $x = 3$ null ist. Und: Der Wertebereich ist nicht dasselbe wie der Definitionsbereich. Bei $f(x) = x^2 + 3$ ist $D = \mathbb{R}$, aber $W = [3; \infty[$. Schließlich gilt: Eine Funktion kann nur an Stellen, die zum Definitionsbereich gehören, Nullstellen haben.

Beispiel 8

Ein Handytarif A kostet *10\,€* Grundgebühr und 5 Cent je Minute, Tarif B hat keine Grundgebühr, kostet aber 12 Cent je Minute. Ab wie vielen Minuten ist Tarif A günstiger?

$f_A(x) = 10 + 0{,}05x$ und $f_B(x) = 0{,}12x$. Gleichsetzen: $10 + 0{,}05x = 0{,}12x \Rightarrow 10 = 0{,}07x \Rightarrow x \approx 142{,}9$. Ab etwa 143 Minuten ist Tarif A günstiger. Am Schnittpunkt kosten beide etwa *17{,}14\,€*.

Hinweis: Vier Darstellungen derselben Funktion

Eine Funktion kann in vier Formen vorliegen: als Wortvorschrift („Grundgebühr plus Preis pro Kilometer“), als Wertetabelle, als Graph und als Funktionsterm. Gute Mathematiker wechseln zwischen den Darstellungen. Aus der Tabelle erkennst du lineares Wachstum an gleichen Differenzen der Funktionswerte, aus dem Graph liest du Nullstellen und Extrempunkte ab, aus dem Term berechnest du alles exakt.

Wusstest du?

Den Begriff „Funktion“ führte Gottfried Wilhelm Leibniz 1673 ein, die Schreibweise $f(x)$ stammt von Leonhard Euler (1734). Im Alltag begegnen dir Funktionen überall: Der Preis hängt von der Menge ab, die Temperatur von der Uhrzeit, die Bremsstrecke von der Geschwindigkeit. Für Computerprogramme ist das Wort Funktion zum festen Begriff geworden: Eine Funktion nimmt Eingaben und liefert genau eine Ausgabe.

Häufige Fehler

- $f(x-3)$ verschiebt nach **rechts**, nicht nach links.
- Beim Einsetzen negativer Zahlen Klammern setzen: $f(-2) = (-2)^2$, nicht -2^2.
- Beim Wurzelziehen beide Lösungen $\pm$ nicht vergessen.
- Symmetrie nicht nur an einem Wert testen, sondern für allgemeines x nachrechnen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Funktion: Jedem x aus dem Definitionsbereich D wird genau ein $y = f(x)$ zugeordnet; Wertebereich W ist die Menge aller y.
- Definitionsbereich: Nenner $\neq 0$, Radikand ≥ 0; der Wertebereich ergibt sich aus Graph oder Scheitelform.
- Nullstellen: $f(x) = 0$ lösen (ausklammern, faktorisieren, Mitternachtsformel); y-Achsenabschnitt ist $f(0)$.
- Symmetrie: $f(-x) = f(x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse; $f(-x) = -f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Transformationen: $f(x-d)+e$ verschiebt, $a\,f(x)$ streckt, $-f(x)$ spiegelt an der x-Achse, $f(-x)$ an der y-Achse.
- Scheitelform $a(x-d)^2+e$: Scheitel $S(d\,|\,e)$, nach oben geöffnet für $a > 0$.
- Monotonie: steigend, wenn aus x_1 folgt $f(x_1)$; fallend entsprechend.
- Funktionen lassen sich als Wortvorschrift, Tabelle, Graph und Term darstellen; Wechsel der Darstellung gehört zum Standard.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Skizziere zuerst Scheitelpunkt und Nullstellen und prüfe dann, ob dein Graph zu den Rechenergebnissen passt. Eine kleine Skizze deckt viele Rechenfehler auf, bevor es die Lehrkraft in der Klausur tut.