Arbeitsblatt - Funktionen und ihre Eigenschaften

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Funktionswerte berechnen

Berechne die Funktionswerte und die Nullstellen.

a) $f(x) = 2x - 6$: $f(4)$ und die Nullstelle
b) $g(x) = x^2 - 4x$: $g(-1)$ und die Nullstellen
c) $h(x) = -x^2 + 9$: $h(2)$ und die Nullstellen
d) $k(x) = \frac{12}{x}$: $k(3)$, $k(-4)$, Nullstelle?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Wertetabelle und Graph

Fertige für $f(x) = x^2 - 2x$ eine Wertetabelle an.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	?	?	?	?	?

a) Berechne die fehlenden Werte.
b) Wo liegen die Nullstellen?
c) Welche Symmetrie erkennst du an den Werten? Wo liegt der Scheitel?
d) Gib den Wertebereich an.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Definitionsbereich bestimmen

Gib jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich an.

a) $f(x) = \sqrt{x - 3}$
b) $g(x) = \frac{1}{x-2}$
c) $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$
d) $k(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Nullstellen bestimmen

Bestimme alle Nullstellen und gib an, ob der Graph die Achse schneidet oder berührt.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
b) $g(x) = x^3 - 4x$
c) $h(x) = (x - 2)(x + 3)$
d) $k(x) = x^2 + 4$
e) $m(x) = x^2 - 6x + 9$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Symmetrie untersuchen

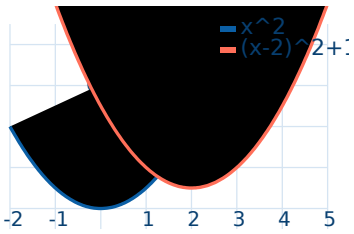
Untersuche, ob der Graph symmetrisch zur y-Achse oder zum Ursprung ist.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2$
b) $g(x) = x^3 + x$
c) $h(x) = x^2 + x$
d) $k(x) = |x| - 2$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Transformationen der Parabel

Die Abbildung zeigt die Normalparabel und die Parabel $g(x) = (x - 2)^2 + 1$.



a) Beschreibe, wie g aus $f(x) = x^2$ entsteht.
b) Gib den Scheitel und den Wertebereich von g an.
c) Wie entstehen $h(x) = -x^2 + 3$ und $k(x) = 2x^2$ aus der Normalparabel?
d) Hat g Nullstellen? Begründe.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Wertebereich bestimmen

Bestimme Definitions- und Wertebereich.

a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $g(x) = -x^2 + 1$
c) $h(x) = 2x - 1$
d) $k(x) = \sqrt{x}$
e) $m(x) = |x| - 2$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Die Taxifahrt

Ein Taxiunternehmen berechnet *3{,}50\,€* Grundgebühr und *1{,}80\,€* je gefahrenem Kilometer.

a) Stelle die Funktion $p(x)$ für den Preis bei x Kilometern auf.
b) Berechne den Preis für 12 km.
c) Wie weit kommt man für *30\,€*?
d) Was bedeuten Steigung und y-Achsenabschnitt im Sachzusammenhang?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Zwei Handytarife

Tarif A kostet *10\,€* Grundgebühr und 5 Cent je Minute, Tarif B hat keine Grundgebühr, aber 12 Cent je Minute.

a) Stelle beide Funktionsterme auf.
b) Berechne die Kosten bei 100 und bei 200 Minuten.
c) Ab wie vielen Minuten ist Tarif A günstiger?
d) Welchen Tarif empfiehlst du jemandem, der etwa 90 Minuten im Monat telefoniert?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das Parkhaus

Im Parkhaus der Innenstadt kostet die erste Stunde *2\,€*, jede weitere angefangene Stunde *1{,}50\,€*. Nach 6 Stunden ist die Tageshöchstgebühr von *9\,€* erreicht.

a) Berechne die Gebühr für 1 Stunde, für 2 Stunden und für $3{,}5$ Stunden.
b) Zeichne im Kopf die Treppenfunktion. Wie viele Stufen hat sie bis zur Höchstgebühr?
c) Warum ist die Zuordnung Parkzeit $\to$ Preis eine Funktion, aber nicht umkehrbar?
d) Ab welcher Parkdauer lohnt sich ein Tagesticket für *9\,€*?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Springbrunnen

Ein Wasserstrahl im Stadtpark folgt der Parabel $h(x) = -0{,}5x^2 + 2x$ (in Metern, x horizontaler Abstand zur Düse).

a) Bestimme die Nullstellen. Was bedeuten sie?
b) Berechne den Scheitel. Wie hoch spritzt das Wasser?
c) Gib den sinnvollen Definitionsbereich und den Wertebereich an.
d) Wie hoch ist der Strahl in 3 m Entfernung?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Temperaturverlauf an einem Wintertag

Die Tabelle zeigt die Temperaturen in Köln (in °C).

Uhrzeit	0	4	8	12	16	20	24
Temperatur	-2	-4	-1	3	1	-1	-3

a) Um wie viele Grad stieg die Temperatur zwischen 4 und 12 Uhr?
b) Bestimme die mittlere Änderungsrate in diesem Zeitraum.
c) In welchen Intervallen fällt, in welchen steigt die Temperatur (grob)?
d) Wo liegen vermutlich die Extremwerte?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Scheitelform und Normalform

Gegeben ist die Parabel $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

a) Forme in die Normalform $x^2 + px + q$ um.
b) Bestimme die Nullstellen. Was folgt für den Graphen?
c) Gib den y-Achsenabschnitt an.
d) Wie lautet die Scheitelform von $g(x) = x^2 + 6x + 5$?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Fahrradverleih am See

Drei Verleihe bieten Fahrräder an. Die Tabelle zeigt Grundgebühr und Preis je Stunde.

Tarif	Grundgebühr	Preis je Stunde
A	5 €	2 €
B	0 €	4 €
C	12 €	1 €

a) Stelle die Funktionen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ für die Kosten bei t Stunden auf.
b) Berechne die Kosten für 1, 3 und 6 Stunden.
c) Welcher Verleih ist bei welcher Dauer am günstigsten?
d) Bestimme rechnerisch, ab wann C günstiger als B ist.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Wasserstand im Löschteich

Aus einem Löschteich der Feuerwehr werden 40 Liter pro Minute abgepumpt. Anfangs enthält er 1200 Liter. Das Volumen nach t Minuten ist $V(t) = 1200 - 40t$.

a) Bestimme den sinnvollen Definitionsbereich.
b) Wie viel Wasser ist nach 10 Minuten noch im Teich?
c) Gib den Wertebereich an.
d) Bestimme die Nullstelle und deute sie.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Betragsfunktion mit Fallunterscheidung

Gegeben ist $g(x) = |x - 2| + 1$.

a) Schreibe g ohne Betragsstriche (Fallunterscheidung).
b) Berechne $g(0)$, $g(2)$, $g(5)$.
c) Gib den Wertebereich an und bestimme den tiefsten Punkt.
d) Hat g Nullstellen? Begründe.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Verknüpfung von Funktionen

Gegeben sind $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2$.

a) Bestimme $(f + g)(x)$ und $(f \cdot g)(x)$.
b) Bestimme die Verkettungen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ und $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
c) Berechne beide Verkettungen für $x = 3$.
d) Sind die Verkettungen gleich? Erkläre.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Knobelaufgabe: Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion macht eine Funktion rückgängig. Ihr Graph entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$.

a) Bestimme die Umkehrfunktion von $f(x) = 2x + 3$.
b) Bestimme die Umkehrfunktion von $g(x) = x^2$ für $x \geq 0$.
c) Prüfe $f^{-1}(f(5))$.
d) Warum hat $g(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ keine Umkehrfunktion?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Parabel aus Nullstellen und Scheitel

Eine Parabel hat die Nullstellen $x = 1$ und $x = 5$ und den Scheitel $S(3 \mid -4)$.

a) Stelle den Ansatz $f(x) = a(x - 1)(x - 5)$ auf.
b) Bestimme a mit dem Scheitel.
c) Gib die Normalform an.
d) Prüfe den Scheitel in der Scheitelform.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Die Funktion ist nicht eindeutig

Welche der folgenden Zuordnungen sind Funktionen? Begründe.

a) Jeder Schüler $\rightarrow$ seine Klasse

b) Jede Klasse $\rightarrow$ ihre Schüler
c) $x \mapsto \sqrt{x}$ (positive Wurzel)
d) $x \mapsto y$ mit $y^2 = x$