Lösungen - Funktionen und ihre Eigenschaften

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f(4) = 8 - 6 = 2$; $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.
b) $g(-1) = 1 + 4 = 5$; $x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 4$.
c) $h(2) = -4 + 9 = 5$; $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
d) $k(3) = 4$; $k(-4) = -3$; keine Nullstelle, denn $\frac{12}{x} \neq 0$.
Begründung: Für einen Funktionswert setzt man die gegebene Zahl für x ein. Für Nullstellen setzt man den Funktionsterm gleich null und löst die Gleichung, bei b) durch Ausklammern, bei c) durch Wurzelziehen. Ein Bruch ist nur null, wenn sein Zähler null ist; der Zähler 12 ist das nie.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $f(-1) = 3$; $f(0) = 0$; $f(1) = -1$; $f(2) = 0$; $f(3) = 3$.
b) $x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$.
c) Die Werte sind symmetrisch zu $x = 1$: $f(0) = f(2)$ und $f(-1) = f(3)$. Scheitel $S(1 \mid -1)$.
d) $W = [-1; \infty[$.
Begründung: Bei einer Parabel liegt der Scheitel genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen, hier also bei $x = \frac{0+2}{2} = 1$. Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist der Scheitel der tiefste Punkt; deshalb beginnt der Wertebereich bei -1.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $x - 3 \geq 0 \Rightarrow D = [3; \infty[$.
b) $x \neq 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
c) $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
d) $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow D = [-2; 2]$.
Merke: Bei Wurzeln muss der Term unter der Wurzel mindestens null sein, bei Brüchen darf der Nenner nicht null werden. Diese Stellen schließt man aus dem Definitionsbereich aus. Bei d) gilt $x^2 \leq 4$ genau für die Zahlen zwischen -2 und 2.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow x = 2$ oder $x = 3$ (Schnitt).
b) $x(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2, -2$ (Schnitt).
c) $x = 2$ oder $x = -3$ (Schnitt).
d) $x^2 = -4$ hat keine Lösung: keine Nullstelle.
e) $(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ (doppelte Nullstelle: der Graph berührt die Achse).

Merke: Eine einfache Nullstelle bedeutet, dass der Graph die x-Achse schneidet und dort das Vorzeichen wechselt. Eine doppelte Nullstelle, wie bei e), bedeutet, dass er die Achse nur berührt. Bei d) liegt der Scheitel bei $(0 \mid 4)$ über der Achse, darum gibt es keine Nullstelle.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$: achsensymmetrisch.
b) $g(-x) = -x^3 - x = -g(x)$: punktsymmetrisch zum Ursprung.
c) $h(-x) = x^2 - x$, weder $h(x)$ noch $-h(x)$: keine dieser Symmetrien.
d) $k(-x) = |-x| - 2 = |x| - 2 = k(x)$: achsensymmetrisch.
Merke: Man setzt $-x$ ein und vergleicht. Gilt $f(-x) = f(x)$, ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse; gilt $f(-x) = -f(x)$, ist er punktsymmetrisch zum Ursprung. Bei ganzrationalen Funktionen erkennt man das schon an den Exponenten: nur gerade oder nur ungerade.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Verschiebung um 2 nach rechts und um 1 nach oben.
b) $S(2 \mid 1)$, $W = [1; \infty[$.
c) h: Spiegelung an der x-Achse, dann Verschiebung um 3 nach oben. k: Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung.
d) Nein: Der Scheitel liegt bei $y = 1 > 0$, die Parabel ist nach oben geöffnet, der Graph liegt immer über der x-Achse.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $D = \mathbb{R}$, $W = [3; \infty[$.
b) $D = \mathbb{R}$, $W =]-\infty; 1]$.
c) $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$.
d) $D = [0; \infty[$, $W = [0; \infty[$.
e) $D = \mathbb{R}$, $W = [-2; \infty[$.
Begründung: Für den Wertebereich überlegt man, welche y-Werte vorkommen. Bei a) ist $x^2 \geq 0$, also $f(x) \geq 3$; bei b) ist $-x^2 \leq 0$, also $g(x) \leq 1$. Die Gerade c) nimmt jeden Wert an. Wurzel und Betrag sind nie negativ, das verschiebt sich bei e) um -2.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $p(x) = 3{,}5 + 1{,}8x$.
b) *p(12)=3{,}5+21{,}6=25{,}10\,€*.
c) $3{,}5 + 1{,}8x = 30 \Rightarrow x = \frac{26{,}5}{1{,}8} \approx 14{,}7$ km.
d) Die Steigung $1{,}8$ ist der Preis je Kilometer, der y-Achsenabschnitt $3{,}5$ die Grundgebühr.
Antwort: Die Fahrt über 12 km kostet *25{,}10\,€*; für *30\,€* kommt man knapp $14{,}7$ km weit. Der Preis ist eine lineare Funktion der Strecke: Jeder zusätzliche Kilometer kostet gleich viel, nämlich *1{,}80\,€*.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $f_A(x) = 10 + 0{,}05x$; $f_B(x) = 0{,}12x$.
b) A: *15\,€* und *20\,€*; B: *12\,€* und *24\,€*.
c) $10 + 0{,}05x = 0{,}12x \Rightarrow x = \frac{10}{0{,}07} \approx 142{,}9$; ab 143 Minuten.
d) Tarif B, denn bei 90 Minuten zahlt man *10{,}80\,€* gegenüber *14{,}50\,€*.
Begründung: Für den Vergleich setzt man beide Terme gleich und bestimmt den Schnittpunkt der Geraden. Davor ist die Gerade mit der kleineren Grundgebühr günstiger, danach die mit der kleineren Steigung. Antwort: Bei 90 Minuten spart man mit Tarif B *3{,}70\,€* im Monat.

Lösung zu Aufgabe 10

a) *2\,€*; *2+1{,}5=3{,}50\,€*; $3{,}5$ h: *2+3\cdot1{,}5=6{,}50\,€* (drei weitere angefangene Stunden).
b) Die Preise steigen je Stunde um *1{,}50\,€*: 2; $3{,}5$; 5; $6{,}5$; 8; $9{,}5 \to 9$ (gedeckelt). Das sind 6 Stufen.
c) Jede Parkzeit hat genau einen Preis. Aber ein Preis gehört zu vielen Parkzeiten (innerhalb einer Stunde), also gibt es keine eindeutige Umkehrung.
d) Das Tagesticket ist gleich der Höchstgebühr; es lohnt sich ab dem Zeitpunkt, an dem die Gebühr *9\,€* erreicht, also ab 6 Stunden.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $-0{,}5x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ und $x = 4$: Düse und Aufschlagstelle.
b) Scheitel bei $x = 2$, $h(2) = -2 + 4 = 2$ m.
c) $D = [0;4]$, $W = [0;2]$.
d) $h(3) = -4{,}5 + 6 = 1{,}5$ m.
Begründung: Der Scheitel liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen, also bei $x = 2$. Werte außerhalb von $[0;4]$ sind physikalisch sinnlos, da das Wasser dort nicht fließt. Antwort: Der Strahl ist 2 m hoch, 4 m weit und in 3 m Entfernung noch $1{,}5$ m hoch.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $3 - (-4) = 7$ °C.
b) $\frac{7}{8} = 0{,}875$ °C pro Stunde.
c) Fallend von 0 bis 4 Uhr, steigend von 4 bis 12 Uhr, fallend von 12 bis 24 Uhr.
d) Das Minimum liegt bei etwa 4 Uhr (-4 °C), das Maximum bei etwa 12 Uhr (3 °C).

Lösung zu Aufgabe 13

a) $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$.
b) $x^2 - 4x + 5 = 0$: Diskriminante $16 - 20 = -4$, keine Nullstellen; der Graph liegt oberhalb der x-Achse.
c) $f(0) = 5$.
d) Quadratische Ergänzung: $x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$; Scheitel $S(-3\,|\,-4)$.

Merke: Die Scheitelform $a(x-d)^2+e$ zeigt sofort den Scheitel $S(d\,|\,e)$; die Normalform zeigt den y-Achsenabschnitt. Mit der quadratischen Ergänzung wechselt man von der Normalform zur Scheitelform: Man addiert und subtrahiert das Quadrat der halben Zahl vor x.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $A(t)=5+2t$; $B(t)=4t$; $C(t)=12+t$.
b) $t=1$: A 7, B 4, C 13. $t=3$: A 11, B 12, C 15. $t=6$: A 17, B 24, C 18 (in Euro).
c) B ist bei kurzer Dauer (bis $2{,}5$ h) am günstigsten, A bei mittlerer Dauer (bis ca. 7 h), C erst bei sehr langer Dauer. Kontrolle: $A=C$ für $5+2t=12+t \Rightarrow t=7$.
d) $12+t$: ab 4 Stunden ist C günstiger als B.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $0\le t\le 30$, denn nach 30 Minuten ist der Teich leer ($V(30)=0$).
b) $V(10)=800$ Liter.
c) $W=[0;1200]$.
d) $1200-40t=0 \Rightarrow t=30$: Nach 30 Minuten ist der Teich leer.
Begründung: Negative Zeiten und negative Wassermengen sind sinnlos, deshalb beschränkt man den Definitionsbereich auf $0\le t\le 30$. Die Steigung -40 bedeutet: Jede Minute nimmt das Volumen um 40 Liter ab.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Für $x\ge 2$: $g(x)=x-1$. Für x: $g(x)=-(x-2)+1=3-x$.
b) $g(0)=3$; $g(2)=1$; $g(5)=4$.
c) $W=[1;\infty[$; der Tiefpunkt (Knick) liegt bei $(2\,|\,1)$.
d) Nein, denn $|x-2|\ge 0$ und damit $g(x)\ge 1>0$.
Merke: Der Betrag $|a|$ ist a für $a\ge 0$ und $-a$ für a. Deshalb unterscheidet man die Fälle $x\ge 2$ und x. Der Graph ist ein um 2 nach rechts und 1 nach oben verschobenes „V“ mit dem Knick im tiefsten Punkt.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $(f+g)(x)=x^2+x+1$; $(f\cdot g)(x)=x^3+x^2$.
b) $f(g(x))=x^2+1$; $g(f(x))=(x+1)^2=x^2+2x+1$.
c) $f(g(3))=10$; $g(f(3))=16$.
d) Nein: Die Reihenfolge der Verkettung ist wichtig.
Begründung: Bei $f(g(x))$ wird zuerst quadriert und dann 1 addiert, bei $g(f(x))$ zuerst 1 addiert und dann quadriert. Die Ergebnisse 10 und 16 zeigen, dass die Verkettung im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $y=2x+3 \Rightarrow x=\frac{y-3}{2}$; $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$.

b) $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$; $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
c) $f(5) = 13$; $f^{-1}(13) = \frac{10}{2} = 5$.
d) Weil $g(2) = g(-2) = 4$ ist: Zu $y = 4$ gehören zwei Werte x, die Zuordnung wäre nicht eindeutig.
Merke: Zur Bestimmung der Umkehrfunktion löst man $y = f(x)$ nach x auf und vertauscht danach x und y. Eine Umkehrfunktion existiert nur, wenn jeder y-Wert höchstens einmal vorkommt; deshalb schränkt man bei x^2 den Definitionsbereich auf $x \geq 0$ ein.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Wegen der Nullstellen gilt $f(x) = a(x-1)(x-5)$.
b) $f(3) = a \cdot 2 \cdot (-2) = -4a = -4 \Rightarrow a = 1$.
c) $f(x) = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$.
d) $f(x) = (x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4$: passt.
Begründung: Der Ansatz mit Linearfaktoren erfüllt die Nullstellen automatisch. Der Scheitel liegt in der Mitte zwischen 1 und 5, also bei $x = 3$; dort setzt man ein und bestimmt a. Antwort: $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Ja: Jeder Schüler gehört zu genau einer Klasse.
b) Nein: Einer Klasse werden mehrere Schüler zugeordnet.
c) Ja: Zu jedem $x \geq 0$ gibt es genau einen Wert $\sqrt{x}$.
d) Nein: Zu $x = 4$ gehören $y = 2$ und $y = -2$.
Merke: Eine Funktion ordnet jedem Element der Definitionsmenge genau einen Wert zu. Mehrere Elemente dürfen denselben Wert haben (a), aber ein Element darf nicht mehrere Werte bekommen (b, d). Darum ist der Graph von d) eine nach rechts geöffnete Parabel, aber kein Funktionsgraph.