Lösungen zur Klassenarbeit - Extrem- und Wendepunkte, Kurvendiskussion

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

a) Potenzregel: $f'(x) = 3x^2 - 12$ und $f''(x) = 6x$ (1 P.).
b) Notwendige Bedingung für Extremstellen ist eine waagerechte Tangente, also $f'(x) = 0$: $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$, $x = 2$ oder $x = -2$ (1 P.).
c) Hinreichende Bedingung mit der zweiten Ableitung: $f''(2) = 12 > 0$, der Graph ist dort linksgekrümmt, also liegt ein Tiefpunkt vor. $f(2) = 8 - 24 = -16$, somit $T(2|-16)$ (1,5 P.). $f''(-2) = -12 < 0$, rechtsgekrümmt, also Hochpunkt; $f(-2) = -8 + 24 = 16$, somit $H(-2|16)$ (1,5 P.). Kontrolle mit der Symmetrie: f enthält nur ungerade Exponenten und ist punktsymmetrisch zum Ursprung; H und T liegen deshalb spiegelbildlich zueinander. Antwort: Hochpunkt $H(-2|16)$, Tiefpunkt $T(2|-16)$.

Lösung zu Aufgabe 2 (3 BE/Punkte)

a) Ableitungen: $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $g''(x) = 6x - 12$, $g'''(x) = 6$. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle: $g''(x) = 0$, also $6x - 12 = 0$ und $x = 2$ (1 P.). Hinreichend ist $g'''(2) = 6 \neq 0$, daher liegt tatsächlich ein Wendepunkt vor. Funktionswert: $g(2) = 8 - 24 + 18 = 2$, also $W(2|2)$ (1 P.). Die Wendetangente hat die Steigung $g'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$.
b) Für $x < 2$ ist $g''(x) = 6x - 12 < 0$. Eine negative zweite Ableitung bedeutet, dass die Steigung abnimmt: Der Graph ist rechtsgekrümmt, wie eine Rechtskurve beim Fahren in x-Richtung (1 P.). Für $x > 2$ ist er linksgekrümmt; im Wendepunkt wechselt die Krümmung. Antwort: $W(2|2)$, für $x < 2$ rechtsgekrümmt.

Lösung zu Aufgabe 3 (5 BE/Punkte)

a) Die beiden Seiten senkrecht zum Fluss heißen x, die Seite parallel zum Fluss bekommt den restlichen Zaun $60 - 2x$ (Nebenbedingung). Zielfunktion Fläche: $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$ (1 P.). Sinnvoller Definitionsbereich: $0 < x < 30$, damit beide Seiten positiv sind (1 P.).
b) $A'(x) = 60 - 4x = 0$ ergibt $x = 15$. Die zweite Ableitung $A''(x) = -4 < 0$ bestätigt ein Maximum (1 P.). Maße: 15 m senkrecht zum Fluss und $60 - 30 = 30$ m entlang des Ufers (1 P.). Randwerte $A(0) = A(30) = 0$ sind kleiner, das Maximum liegt also im Inneren.
c) $A(15) = 15 \cdot 30 = 450\,\mathrm{m}^2$ (1 P.). Bemerkenswert: Die Uferseite ist doppelt so lang wie die anderen Seiten. Ein Quadrat mit 20 m Seitenlänge ergäbe nur $400\,\mathrm{m}^2$.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Ableitung: $G'(x) = -x + 10$. Aus $G'(x) = 0$ folgt $x = 10$; wegen $G''(x) = -1 < 0$ ist

das ein Maximum. Da x in Hundert Artikeln gemessen wird, ist der Gewinn bei 1000 verkauften Artikeln am größten (1 P.).
b) $G(10) = -0{,}5 \cdot 100 + 100 - 30 = -50 + 100 - 30 = 20$. Der größte Gewinn beträgt 20 € (1 P.).
c) Gewinnschwelle: $G(x) = 0$. Multiplikation mit -2 ergibt $x^2 - 20x + 60 = 0$. pq-Formel: $x = 10 \pm \sqrt{100 - 60} = 10 \pm \sqrt{40} \approx 10 \pm 6{,}32$, also $x_1 \approx 3{,}7$ und $x_2 \approx 16{,}3$ (1 P.). Weil die Parabel nach unten geöffnet ist, ist der Gewinn nur zwischen diesen Stellen positiv: etwa ab 370 und bis etwa 1630 Artikeln (1 P.). Auf Hundert genau: Gewinnzone ungefähr von 400 bis 1600 Artikeln.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $h'(x) = 4x^3 - 4x$. Ausklammern: $4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$. Nullstellen der Ableitung: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ (1 P.).
b) Vorzeichentabelle der Faktoren: Für $x < -1$ sind alle drei Faktoren negativ, $h' < 0$: h fällt. Auf $]-1;0[$ ist $h' > 0$: h steigt. Auf $]0;1[$ ist $h' < 0$: h fällt. Für $x > 1$ ist $h' > 0$: h steigt (1 P.). Ein Vorzeichenwechsel von minus nach plus bedeutet Tiefpunkt, von plus nach minus Hochpunkt. Mit $h(\pm 1) = 1 - 2 = -1$ und $h(0) = 0$ erhält man die Tiefpunkte $T_1(-1|-1)$, $T_2(1|-1)$ und den Hochpunkt $H(0|0)$ (1 P.). Die Lage ist symmetrisch, weil h nur gerade Exponenten enthält und achsensymmetrisch zur y-Achse ist.