Lernzettel - Extrem- und Wendepunkte, Kurvendiskussion

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Wo ist der Berg am höchsten?

Eine Radetappe führt über Hügel und Täler. Die Fahrer wollen wissen: Wo ist der höchste Punkt, wo der tiefste, und wo ist der Anstieg am steilsten? Genau diese Fragen beantwortet die Kurvendiskussion. Mit der ersten Ableitung findest du Hoch- und Tiefpunkte, mit der zweiten Ableitung erkennst du, wie sich die Steigung ändert, und findest Wendepunkte. Außerdem löst du Aufgaben, in denen etwas **möglichst groß** oder **möglichst klein** werden soll: die größte Fläche bei gegebenem Zaun, den größten Gewinn, die kleinsten Kosten.

Monotonie und Ableitung

Die erste Ableitung verrät, wie sich der Graph verhält: Gilt $f'(x) > 0$ in einem Intervall, ist f dort **streng monoton wachsend**. Gilt $f'(x)$, ist f **streng monoton fallend**. Für $f(x) = x^3 - 3x$ ist $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Es ist $f' > 0$ für x und $x > 1$, und f' für -1.

Extrempunkte

Ein **Hochpunkt** H ist ein lokal höchster Punkt, ein **Tiefpunkt** T ein lokal tiefster Punkt des Graphen. Beide heißen **Extrempunkte**.

Notwendige Bedingung: Hat f an der Stelle x_0 ein Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$ (waagerechte Tangente).

Hinreichende Bedingungen:

- **Mit der zweiten Ableitung:** Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$, liegt ein Hochpunkt vor. Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, liegt ein Tiefpunkt vor.
- **Mit dem Vorzeichenwechsel von f':** Wechselt f' bei x_0 von $+$ nach $-$, liegt ein Hochpunkt vor, bei Wechsel von $-$ nach $+$ ein Tiefpunkt. Dieses Kriterium funktioniert auch, wenn $f''(x_0) = 0$ ist.

Ist $f'(x_0) = 0$ ohne Vorzeichenwechsel, liegt ein **Sattelpunkt** (Terrassenpunkt) vor, zum Beispiel bei $f(x) = x^3$ im Ursprung.

Krümmung und Wendepunkte

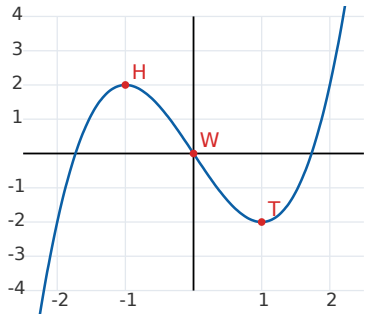
Gilt $f''(x) > 0$, ist der Graph **linksgekrümmt** (wie eine Schale nach oben). Gilt $f''(x)$, ist er **rechtsgekrümmt**. Ein **Wendepunkt** ist ein Punkt, an dem sich die Krümmung ändert. Notwendig ist $f''(x_0) = 0$. Hinreichend ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ (oder ein Vorzeichenwechsel von f''). Ein Wendepunkt mit $f'(x_0) = 0$ ist ein Sattelpunkt. Die

Tangente im Wendepunkt heißt **Wendetangente**.

Beispiel: vollständige Untersuchung

Untersuche $f(x) = x^3 - 3x$.

1. **Symmetrie:** nur ungerade Exponenten, also punktsymmetrisch zum Ursprung.
2. **Nullstellen:** $x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$.
3. **Verhalten:** Grad 3, $a_3 > 0$: für $x \to \infty$ gilt $f \to \infty$, für $x \to -\infty$ gilt $f \to -\infty$.
4. **Ableitungen:** $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$.
5. **Extrema:** $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $f''(-1) = -6$, also Hochpunkt $H(-1\,|\,2)$. $f''(1) = 6 > 0$, also Tiefpunkt $T(1\,|\,-2)$.
6. **Wendepunkte:** $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$. $f'''(0) = 6 \neq 0$, also Wendepunkt $W(0\,|\,0)$. Für x ist der Graph rechtsgekrümmt, für $x > 0$ linksgekrümmt.
7. **Skizze:** Alle Punkte eintragen und verbinden.



Die Abbildung zeigt den Graphen mit Hochpunkt H, Tiefpunkt T und Wendepunkt W.

Beispiel: Vorzeichenwechsel statt zweiter Ableitung

Bei $f(x) = x^4 - 4x^3$ gilt $f'(x) = 4x^2(x - 3)$. Die Nullstellen von f' sind $x = 0$ und $x = 3$. Für $x = 0$ ist $f''(0) = 0$, das Kriterium mit der zweiten Ableitung hilft nicht. Wegen $x^2 \geq 0$ wechselt f' bei $x = 0$ das Vorzeichen nicht (links und rechts negativ): Es liegt ein Sattelpunkt $(0\,|\,0)$ vor. Bei $x = 3$ wechselt f' von $-$ nach $+$: Tiefpunkt $T(3\,|\,-27)$. Merke dir: Wenn $f''(x_0) = 0$ ist, entscheidet der Vorzeichenwechsel von f'.

Beispiel: Extremwertaufgabe

Ein Rechteck hat den Umfang 20 m. Welche Seitenlängen ergeben den größten Flächeninhalt? Mit der Seitenlänge x ist die andere Seite $10 - x$. Zielfunktion: $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$. Ableitung $A'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$. Wegen $A''(x) = -2$ liegt ein Maximum vor. Das Quadrat mit Seitenlänge 5 m hat den größten Flächeninhalt $A = 25\,\mathrm{m}^2$.

Wertetabelle und Skizze

Eine saubere Skizze entsteht aus wenigen, genau berechneten Punkten: Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte und gegebenenfalls ein bis zwei Hilfspunkte. Zeichne zuerst diese Punkte ein, trage dann die Steigung als kleine Tangentenstriche an den Extrem- und Wendepunkten ein und verbinde alles mit einer

glatten Kurve. Achte auf das Verhalten für große $|x|$: Der Graph muss am Rand zu Grad und Leitkoeffizient passen. Eine Skizze ist kein exakter Plot, aber sie muss alle berechneten Eigenschaften zeigen und darf ihnen nicht widersprechen.

Randextrema

Ist die Funktion nur auf einem Intervall $[a;b]$ betrachtet, können größte und kleinste Werte auch am Rand liegen. Vergleiche deshalb immer die Funktionswerte an den Randstellen mit denen der Extrempunkte.

Definition: Extrempunkte

Ein Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ heißt **Hochpunkt**, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ in einer Umgebung von x_0 gilt, und **Tiefpunkt**, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ dort gilt. Man spricht auch von lokalen Maxima und Minima. Der **Funktionswert** $f(x_0)$ heißt Maximum bzw. Minimum, der Punkt selbst Extrempunkt.

Satz: Notwendige und hinreichende Bedingung für Extrema

Notwendig: Hat f bei x_0 einen Extrempunkt, so gilt $f'(x_0) = 0$. **Hinreichend (1):** Gilt $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von $+$ nach $-$, liegt ein Hochpunkt vor, bei $-$ nach $+$ ein Tiefpunkt. **Hinreichend (2):** Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$, ist es ein Hochpunkt, bei $f''(x_0) > 0$ ein Tiefpunkt. Ist $f''(x_0) = 0$, entscheidet das Vorzeichenwechsel-Kriterium.

Definition: Wendepunkt

Ein **Wendepunkt** ist ein Punkt, in dem sich die Krümmung des Graphen ändert (von Linkskurve zu Rechtskurve oder umgekehrt). Dort hat die Steigung f' einen Extremwert: Der Graph ist an dieser Stelle am steilsten oder am flachsten. Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, liegt ein Wendepunkt vor. Hat die Tangente im Wendepunkt die Steigung 0, heißt der Punkt **Sattelpunkt** (Terrassenpunkt).

So gehst du vor: Vollständige Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich, Symmetrie (gerade/ungerade), Verhalten für $x \to \pm\infty$ angeben.
2. Schnittpunkte mit den Achsen bestimmen: $f(0)$ und $f(x) = 0$.
3. Ableitungen f', f'', f''' berechnen.
4. Extrempunkte: $f'(x) = 0$ lösen, mit f'' prüfen, y-Koordinaten berechnen.
5. Wendepunkte: $f''(x) = 0$ lösen, mit f''' prüfen, y-Koordinaten berechnen.
6. Wertetabelle anlegen und den Graphen zeichnen; Monotonie- und Krümmungsbereiche notieren.

Beispiel 5

Untersuche $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ auf Extrem- und Wendepunkte.

Es gilt $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, also $x = 1$ oder $x = 3$. Mit $f''(x) = 6x - 12$: $f''(1) = -6$, Hochpunkt $H(1\,|\,4)$; $f''(3) = 6 > 0$, Tiefpunkt $T(3\,|\,0)$. Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, $f'''(x) = 6 \neq 0$, $f(2) = 2$, also $W(2\,|\,2)$. Der Wendepunkt liegt genau in der Mitte zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

Beispiel 6

Zeige, dass $f(x) = x^4$ bei $x = 0$ einen Tiefpunkt hat, obwohl $f''(0) = 0$ ist.

$f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$. Bei $x = 0$ gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$; das zweite Kriterium versagt. Prüfe das Vorzeichen von f': Für x ist $f'(x)$, für $x > 0$ ist $f'(x) > 0$. Das Vorzeichen wechselt von $-$ nach $+$: Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$.

Achtung

Aus $f'(x_0) = 0$ folgt **nicht** automatisch ein Extrempunkt. Bei $f(x) = x^3$ ist $f'(0) = 0$, aber $f'(x) = 3x^2$ wechselt nicht das Vorzeichen: Es ist ein Sattelpunkt. Vergiss außerdem nie, nach der Stelle x_0 auch die **y-Koordinate** auszurechnen, denn gefragt ist meist der Punkt. Und bei Randextrema (auf einem abgeschlossenen Intervall) müssen die Funktionswerte an den Rändern mit den Werten an den Extremstellen verglichen werden.

So gehst du vor: Extremwertaufgaben (Optimierung)

1. Skizze machen, Größen benennen, die Größe festlegen, die extremal werden soll (Zielgröße).
2. Nebenbedingung aufstellen und damit eine Variable eliminieren.
3. Zielfunktion $Z(x)$ mit sinnvollem Definitionsbereich aufstellen.
4. $Z'(x) = 0$ lösen und mit Z'' oder Vorzeichenwechsel prüfen.
5. Ränder des Definitionsbereichs prüfen und Antwortsatz formulieren.

Beispiel 7

Ein Landwirt hat 40 m Zaun und will damit an einer Scheunenwand eine rechteckige Weide begrenzen (die Wand ersetzt eine Seite). Welche Maße ergeben die größte Fläche?

Sei x die Länge der beiden Seiten senkrecht zur Wand. Die dritte Seite ist $40 - 2x$. Zielfunktion: $A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$ mit 0. Ableitung: $A'(x) = 40 - 4x = 0 \Rightarrow x = 10$. $A''(x) = -4$: Maximum. Die Weide ist 10 m breit und 20 m lang, die Fläche beträgt $200\,\mathrm{m}^2$.

Merke: Zusammenhang der drei Funktionen

Der Graph von f steigt dort, wo $f' > 0$, und fällt, wo f'. Er ist linksgekrümmt (nach

oben geöffnet), wo $f'' > 0$, und rechtsgekrümmt, wo f''. Bei einem Wendepunkt von f hat f' einen Extrempunkt und f'' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Dieses Wechselspiel erklärt, warum man Hoch-, Tief- und Wendepunkte mit denselben Rechenschritten findet.

Hinweis: Die Probe mit dem Graphen

Zeichne am Ende immer eine grobe Skizze und prüfe, ob sie zu deinen Ergebnissen passt. Liegt ein Hochpunkt links von einem Tiefpunkt, muss dazwischen ein Wendepunkt liegen, und bei einer ganzrationalen Funktion dritten Grades liegt er genau in der Mitte der beiden Extremstellen. Stimmt das nicht, hast du dich verrechnet. Auch das Verhalten für große Beträge von x hilft: Eine Funktion mit positivem Leitkoeffizienten und ungeradem Grad kommt von links unten und geht nach rechts oben.

Wusstest du?

Pierre de Fermat (1607–1665) fand schon vor der Erfindung der Ableitung eine Methode, Extremwerte zu bestimmen: Er untersuchte, wo eine Größe sich bei winzigen Änderungen nicht mehr ändert. Heute nutzt man dieselbe Idee beim Konstruieren von Brücken, beim Planen von Fahrzeugen mit geringstem Verbrauch und beim Training von Maschinen, die möglichst wenig Fehler machen sollen.

Beispiel 8

Der Gewinn einer Bäckerei ist $G(x) = -0{,}01x^2 + 4x - 100$ Euro bei x verkauften Broten. Bei welcher Stückzahl ist er maximal?

$G'(x) = -0{,}02x + 4 = 0 \Rightarrow x = 200$. Wegen $G''(x) = -0{,}02$ ist dort ein Maximum. $G(200) = -400 + 800 - 100 = 300$. Bei 200 Broten ist der Gewinn mit *300*\,€ am größten. Die Gewinnzone ergibt sich aus $G(x) = 0$, also $x^2 - 400x + 10\,000 = 0$: Das gibt $x = 200 \pm \sqrt{30\,000} \approx 200 \pm 173{,}2$, also von etwa 27 bis 373 Broten.

Häufige Fehler

- Nur $f'(x) = 0$ lösen und vergessen, den y-Wert des Punktes zu berechnen.
- Den Fall $f''(x_0) = 0$ automatisch als Wendepunkt oder Sattelpunkt deuten, ohne weiter zu prüfen.
- Wendepunkt mit Extrempunkt verwechseln: Extrema aus $f' = 0$, Wendepunkte aus $f'' = 0$.
- In Sachaufgaben die Randwerte und die Antwort mit Einheit vergessen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Extremstellen: $f'(x) = 0$ lösen; Art mit f'' (>0 Tiefpunkt, <0 Hochpunkt) oder durch Vorzeichenwechsel von f'.

- Wendestellen: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ (oder Vorzeichenwechsel von f'').
- $f' > 0$: Graph steigt; f': Graph fällt; $f'' > 0$: Linkskurve; f'': Rechtskurve.
- Im Wendepunkt ist die Steigung extremal; bei $f' = 0$ ohne Vorzeichenwechsel liegt ein Sattelpunkt vor.
- Ist $f''(x_0) = 0$, wende das Vorzeichenwechsel-Kriterium an (Beispiel $f(x) = x^4$).
- Immer die y-Koordinate berechnen: Extrem- und Wendepunkte sind Punkte $(x \mid y)$.
- Extremwertaufgaben: Zielfunktion aufstellen, Nebenbedingung einsetzen, ableiten, Ränder prüfen.
- Bei abgeschlossenen Intervallen müssen auch die Randwerte mit den Extremwerten verglichen werden.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Überlege dir vor dem Rechnen, ob dein Ergebnis zur Skizze passt. Bei einer nach oben geöffneten Parabel kann es nur einen Tiefpunkt geben. Schreibe außerdem alle Zwischenergebnisse in eine Tabelle: Stelle, f, f', f''. So behältst du in der Klausur den Überblick.

Zusammenfassung

Extremstellen findest du mit $f'(x) = 0$ und prüfst sie mit f'' oder mit dem Vorzeichenwechsel von f'. Wendestellen findest du mit $f''(x) = 0$ und prüfst sie mit f'''. Aus allen Ergebnissen entsteht die Skizze des Graphen. Diese Schritte nennt man Kurvendiskussion oder Funktionsuntersuchung. Sie sind in jeder Oberstufen-Klausur ein fester Bestandteil.

Kurvendiskussion bei gebrochenen Zahlen

Auch wenn Brüche oder Wurzeln als Koordinaten auftreten, bleibt das Vorgehen gleich. Bei $f(x) = x^4 - 2x^2$ sind die Wendestellen $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ mit dem Funktionswert $-\frac{5}{9}$. Rechne dann lieber exakt mit Brüchen und Wurzeln und runde nur zum Zeichnen. Die Tabelle mit den Werten f, f' und f'' für jede wichtige Stelle verhindert Verwechslungen.