Arbeitsblatt - Extrem- und Wendepunkte, Kurvendiskussion

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Extrempunkte quadratischer Funktionen

Bestimme den Extrempunkt und gib an, ob es ein Hoch- oder Tiefpunkt ist.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$
b) $g(x) = -x^2 + 6x$
c) $h(x) = 2x^2 + 8x + 3$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Extrempunkte einer kubischen Funktion

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Berechne f' und f''.
b) Bestimme die Stellen mit waagerechter Tangente.
c) Entscheide mit f'', welche Art Extrempunkt vorliegt.
d) Gib die Koordinaten der Extrempunkte an.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Monotonie untersuchen

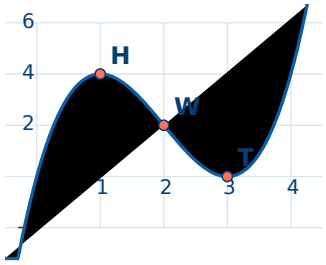
Untersuche $f(x) = x^3 - 3x^2$ auf Monotonie.

a) Berechne f' und zerlege in Linearfaktoren.
b) Erstelle eine Vorzeichentabelle für f'.
c) Gib die Intervalle an, in denen f steigt bzw. fällt.
d) Welche Extrempunkte entstehen?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Wendepunkt bestimmen

Bestimme den Wendepunkt von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ und weise nach, dass er einer ist.



a) Berechne f'' und f'''.
b) Löse $f''(x) = 0$.
c) Prüfe die hinreichende Bedingung.
d) Gib den Wendepunkt an und lies die Lage der Extrempunkte im Bild ab.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Vorzeichenwechsel statt zweiter Ableitung

Untersuche $f(x) = x^4$ und $g(x) = x^3$ an der Stelle 0.

a) Berechne die ersten drei Ableitungen von f und g.
b) Zeige, dass bei beiden $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$ gilt.
c) Prüfe das Vorzeichen der ersten Ableitung links und rechts von 0.
d) Welche Art Punkt liegt jeweils vor?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Der Zaun an der Scheune

Ein Landwirt hat 40 m Zaun. Er will an einer Scheunenwand eine rechteckige Weide einzäunen; die Wand ersetzt eine Seite.

a) Stelle die Zielfunktion $A(x)$ für die Fläche auf.
b) Bestimme den Definitionsbereich.
c) Berechne die Maße der Weide mit größter Fläche.
d) Wie groß ist diese Fläche? Vergleiche mit einer quadratischen Weide $x = y$.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die größte Fläche bei festem Umfang

Ein Rechteck hat den Umfang 60 cm.

a) Stelle die Fläche als Funktion der Seite x auf.
b) Berechne die Seitenlängen für maximale Fläche.
c) Wie groß ist die maximale Fläche?
d) Was folgt allgemein für Rechtecke mit festem Umfang?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Gewinnmaximum der Bäckerei

Der Gewinn einer Bäckerei ist $G(x) = -0{,}01x^2 + 4x - 100$ (in Euro, x Anzahl verkaufter Brote pro Tag).

a) Wie viele Brote bringen den größten Gewinn?
b) Wie hoch ist der größte Gewinn?
c) Ab wie vielen Broten wird Gewinn gemacht (Gewinnschwelle)?
d) Wie ändert sich der Gewinn von $x = 200$ auf $x = 250$?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der Wurf

Ein Ball wird auf dem Sportplatz geworfen. Seine Höhe nach t Sekunden ist $h(t) = -5t^2 + 10t + 2$ (in Metern).

a) Wann ist der Ball am höchsten?
b) Wie hoch fliegt er?
c) Wann trifft er den Boden ($h(t) = 0$)?
d) Bei welcher Geschwindigkeit trifft er auf? ($h'(t)$ zu diesem Zeitpunkt)

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das Höhenprofil der Etappe

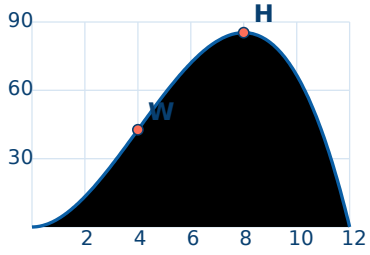
Das Höhenprofil eines Radwegs (Höhe in Hektometern über dem Startpunkt, x in Kilometern) wird näherungsweise durch $h(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 6x$ beschrieben ($0 \le x \le 10$).

a) Berechne h' und h''.
b) Bestimme die Hoch- und Tiefstellen.
c) Bestimme die Stelle der stärksten Steigung bzw. des stärksten Gefälles (Wendestelle).
d) Berechne die Steigung an dieser Stelle in Prozent (Hektometer pro Kilometer $= 10$ Meter pro Kilometer).

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Hochwasserwelle

Der Pegel eines Flusses (Wassermenge in Hundert m³/s) während eines Hochwassers wird durch $w(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2$ beschrieben ($0 \le t \le 12$ Stunden).



a) Berechne $w'(t)$ und bestimme, wann der Pegel am höchsten ist.

b) Wie hoch ist der Höchststand?
c) Wann steigt der Pegel am schnellsten? Berechne w' dort.
d) Wann ist der Pegel wieder bei 0?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Randextrema

Untersuche $f(x) = x^2 - 4x$ auf dem Intervall $[0;5]$.

a) Bestimme den Extrempunkt im Innern.
b) Berechne die Randwerte $f(0)$ und $f(5)$.
c) Wo liegt das globale Maximum, wo das globale Minimum?
d) Wie ändert sich das Maximum auf dem Intervall $[0;3]$?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Eine Funktion vierten Grades

Diskutiere $f(x) = x^4 - 8x^2$.

a) Untersuche die Symmetrie und bestimme die Nullstellen.
b) Bestimme die Extrempunkte.
c) Bestimme die Wendepunkte.
d) Beschreibe den Verlauf des Graphen für $x \to \pm\infty$.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Gewinn und Erlös in der Eisdiele

Die Eisdiele verkauft Eis zu 8\,€ je Liter. Die Kosten für x Liter betragen $K(x) = 0{,}05x^2 + 2x + 60$.

Menge x in l	20	40	60	80	100
Erlös $E(x)$	160	320	480	640	800
Kosten $K(x)$	120	220	360	540	760

a) Prüfe zwei Tabellenwerte für die Kosten.
b) Stelle die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ auf.
c) Bestimme die Menge mit dem größten Gewinn und den Gewinn.
d) Bestimme die Gewinnzone (Bereich mit $G > 0$).

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Parameter in der Funktion

Gegeben ist $f_a(x) = x^3 - 3ax$ mit einem Parameter a.

a) Berechne $f_a'(x)$.
b) Für welche a hat f_a zwei Extremstellen? Gib sie an.

c) Was gilt für $a = 0$?
d) Was gilt für a?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Knobelaufgabe: Funktion aus Eigenschaften

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion der Form $f(x) = ax^3 + bx$, deren Graph den Hochpunkt $H(1 \mid 2)$ hat.

a) Welche Bedingungen liefert der Hochpunkt?
b) Löse das Gleichungssystem für a und b.
c) Gib f an und prüfe die Art des Extrempunkts.
d) Bestimme den Wendepunkt von f.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Knobelaufgabe: Symmetrie am Wendepunkt

Zeige am Beispiel $f(x) = x^3 - 3x^2$, dass der Graph punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.

a) Bestimme den Wendepunkt.
b) Berechne $f(1 + h) + f(1 - h)$ allgemein.
c) Folgere die Punktsymmetrie.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Knobelaufgabe: Die größte Dose

Aus einem quadratischen Blech mit der Seitenlänge 30 cm wird an den Ecken je ein Quadrat mit der Seite x ausgeschnitten, und die Seiten werden zu einer offenen Schachtel hochgebogen.

a) Stelle das Volumen $V(x)$ auf.
b) Gib den Definitionsbereich an.
c) Bestimme x, sodass das Volumen maximal wird.
d) Wie groß ist das maximale Volumen?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Das Wachstum der Sonnenblume

Die Höhe einer Sonnenblume im Schulgarten wird in den ersten 20 Tagen durch $h(t) = -0{,}02t^3 + 0{,}6t^2$ (in Zentimetern, t in Tagen) beschrieben.

a) Berechne die Wachstumsgeschwindigkeit $h'(t)$.
b) Wann wächst die Pflanze am schnellsten? Bestimme dazu die Wendestelle.
c) Wie schnell wächst sie dann, und wie hoch ist sie?
d) Wie hoch ist sie nach 20 Tagen und wie schnell wächst sie dann?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Die Konservendose

Eine zylinderförmige Dose soll $500\,\text{cm}^3$ fassen. Wie müssen Radius r und Höhe h gewählt werden, damit möglichst wenig Blech verbraucht wird?

a) Drücke h durch r aus (Nebenbedingung $\pi r^2 h = 500$).
b) Stelle die Oberfläche $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ als Funktion von r auf.
c) Bestimme das Minimum.
d) Berechne die Maße und vergleiche h mit $2r$.