Lösungen - Extrem- und Wendepunkte, Kurvendiskussion

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$; $f'' = 2 > 0$: Tiefpunkt $T(2 \mid -3)$.
b) $g'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$; $g'' = -2$: Hochpunkt $H(3 \mid 9)$.
c) $h'(x) = 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$; $h'' = 4 > 0$: Tiefpunkt $T(-2 \mid -5)$.
Begründung: Eine waagerechte Tangente ($f' = 0$) ist die notwendige Bedingung. Das Vorzeichen der zweiten Ableitung entscheidet: $f'' > 0$ bedeutet Linkskrümmung und damit Tiefpunkt, f'' Rechtskrümmung und damit Hochpunkt. Bei Parabeln ist der Extrempunkt immer der Scheitel.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$.
b) $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
c) $f''(1) = 6 > 0$: Tiefpunkt; $f''(-1) = -6$: Hochpunkt.
d) $T(1 \mid -2)$; $H(-1 \mid 2)$.
Antwort: Der Graph hat den Hochpunkt $H(-1 \mid 2)$ und den Tiefpunkt $T(1 \mid -2)$. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in f, nicht in f'. Da f ungerade ist, liegen beide Punkte punktsymmetrisch zum Ursprung.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
b) Für x: $f' > 0$; für 0: f'; für $x > 2$: $f' > 0$.
c) Steigend auf $]-\infty; 0[$ und $]2; \infty[$, fallend auf $]0; 2[$.
d) Hochpunkt $H(0 \mid 0)$, Tiefpunkt $T(2 \mid -4)$.
Begründung: Ein Vorzeichenwechsel von f' von plus nach minus bei $x = 0$ zeigt einen Hochpunkt, ein Wechsel von minus nach plus bei $x = 2$ einen Tiefpunkt. Die y-Werte sind $f(0) = 0$ und $f(2) = 8 - 12 = -4$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $f''(x) = 6x - 12$; $f'''(x) = 6$.
b) $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
c) $f'''(2) = 6 \neq 0$: Wendepunkt.
d) $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$; $W(2 \mid 2)$. Im Bild: $H(1 \mid 4)$, $T(3 \mid 0)$; der Wendepunkt liegt in der Mitte.
Begründung: $f''(x) = 0$ ist nur die notwendige Bedingung. Erst $f'''(2) \neq 0$ zeigt, dass die Krümmung wechselt: Für x ist der Graph rechtsgekrümmt, für $x > 2$ linksgekrümmt. Bei kubischen Funktionen liegt der Wendepunkt immer genau in der

Mitte zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $f' = 4x^3$, $f'' = 12x^2$, $f''' = 24x$. $g' = 3x^2$, $g'' = 6x$, $g''' = 6$.
b) $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$; $g'(0) = 0$, $g''(0) = 0$.
c) f': negativ für x, positiv für $x > 0$. $g' = 3x^2$: positiv auf beiden Seiten.
d) f: Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$. g: Sattelpunkt $S(0\,|\,0)$, weil kein Vorzeichenwechsel von g' auftritt.
Merke: Ist auch $f''(x_0) = 0$, versagt das Kriterium mit der zweiten Ableitung. Dann hilft der Vorzeichenwechsel von f': Wechselt das Vorzeichen, liegt ein Extrempunkt vor, sonst ein Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente).

Lösung zu Aufgabe 6

a) Seiten senkrecht zur Wand: x, Seite parallel: $40 - 2x$;
$A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$.
b) 0.
c) $A'(x) = 40 - 4x = 0 \Rightarrow x = 10$; $A'' = -4$. Die Weide ist 10 m breit und 20 m lang.
d) $A(10) = 200\,\mathrm{m}^2$. Quadrat: $x = y \Rightarrow 3x = 40 \Rightarrow x \approx 13{,}3$, Fläche $13{,}3^2 \approx 177{,}8\,\mathrm{m}^2$, also kleiner.
Begründung: Die Nebenbedingung (Zaunlänge $x + x + y = 40$) wird nach y aufgelöst und in die Flächenformel eingesetzt. So entsteht eine Funktion mit nur einer Variablen.
Antwort: Die Weide sollte 10 m tief und 20 m lang sein.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Die andere Seite ist $30 - x$: $A(x) = x(30 - x) = 30x - x^2$.
b) $A'(x) = 30 - 2x = 0 \Rightarrow x = 15$, also ein Quadrat 15 cm $\times$ 15 cm.
c) $A(15) = 225\,\mathrm{cm}^2$.
d) Bei festem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt aller Rechtecke.
Begründung: Aus dem Umfang $2x + 2y = 60$ folgt $y = 30 - x$. Da $A''(x) = -2$, liegt bei $x = 15$ ein Maximum. Antwort: Das Quadrat mit 15 cm Seitenlänge hat die größte Fläche, nämlich 225 Quadratzentimeter.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $G'(x) = -0{,}02x + 4 = 0 \Rightarrow x = 200$; G'': Maximum.
b) *G(200)=-400+800-100=300\,€*.
c) $G(x) = 0 \Rightarrow x = 200 \pm \sqrt{30\,000} \approx 200 \pm 173{,}2$; Gewinn ab 27 Broten.
d) *G(250)=-625+1000-100=275\,€*; der Gewinn sinkt um *25\,€*.
Begründung: Wegen $G''(x) = -0{,}02$ ist der Graph eine nach unten geöffnete Parabel, die Nullstelle von G' ist also das Maximum. Antwort: Bei 200 Broten verdient die Bäckerei am meisten, nämlich 300 Euro; mehr Brote lohnen sich nicht.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $h'(t) = -10t + 10 = 0 \Rightarrow t = 1$ s.
b) $h(1) = -5 + 10 + 2 = 7$ m.
c) $-5t^2 + 10t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1 + \sqrt{1{,}4} \approx 2{,}18$ s.
d) $h'(2{,}18) = -10 \cdot 2{,}18 + 10 = -11{,}8$ m/s: etwa $11{,}8$ m/s abwärts, das sind etwa 42 km/h.
Begründung: Am höchsten Punkt ist die momentane Steiggeschwindigkeit null, deshalb setzt man $h'(t) = 0$. Beim Lösen von $h(t) = 0$ entfällt die negative Lösung, weil die Zeit nicht negativ sein kann. Das negative Vorzeichen in d) bedeutet, dass sich der Ball nach unten bewegt.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $h'(x) = 0{,}3x^2 - 3x + 6$; $h''(x) = 0{,}6x - 3$.
b) $0{,}3x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 20 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{5} \approx 2{,}76$ bzw. $7{,}24$; Hochpunkt bei $2{,}76$, Tiefpunkt bei $7{,}24$.
c) $0{,}6x - 3 = 0 \Rightarrow x = 5$ km, $h''' = 0{,}6 \neq 0$.
d) $h'(5) = 7{,}5 - 15 + 6 = -1{,}5$, das sind $-1{,}5$ Hektometer pro Kilometer, also -150 m pro km $= -15\,\%$ Gefälle.
Begründung: Der Vorzeichenwechsel von h' zeigt, dass bei $x \approx 2{,}76$ km der höchste und bei $x \approx 7{,}24$ km der tiefste Punkt der Etappe liegt. Zwischen ihnen, an der Wendestelle $x = 5$ km, fällt der Weg am steilsten ab.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $w'(t) = -t^2 + 8t = t(8 - t) = 0 \Rightarrow t = 0$ oder $t = 8$; Hochpunkt bei $t = 8$ (Vorzeichenwechsel $+ \to -$).
b) $w(8) = -\frac{512}{3} + 256 = \frac{256}{3} \approx 85{,}3$.
c) $w''(t) = -2t + 8 = 0 \Rightarrow t = 4$; $w'(4) = 16$ pro Stunde; $W(4 \,|\, w(4))$ mit $w(4) = -\frac{64}{3} + 64 \approx 42{,}7$.
d) $t^2(-\frac{t}{3} + 4) = 0 \Rightarrow t = 12$ (und $t = 0$).
Antwort: Der Pegel ist nach acht Stunden am höchsten, steigt nach vier Stunden am schnellsten und ist nach zwölf Stunden wieder bei null. Die Wendestelle $t = 4$ ist für den Hochwasserschutz wichtig, denn dort wächst die Gefahr am schnellsten.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $f' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$, $f(2) = -4$: Tiefpunkt.
b) $f(0) = 0$, $f(5) = 5$.
c) Globales Maximum am Rand bei $x = 5$ mit $f(5) = 5$; globales Minimum bei $x = 2$ mit $f(2) = -4$.
d) Auf $[0; 3]$ sind die Randwerte $f(0) = 0$ und $f(3) = -3$: Das globale Maximum ist dann 0 bei $x = 0$.
Merke: Auf einem abgeschlossenen Intervall muss man neben den lokalen Extrema immer auch die Randwerte prüfen. Das globale Maximum kann am Rand liegen, auch

wenn die Ableitung dort nicht null ist. Ändert man das Intervall, kann sich das globale Maximum verschieben.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Es kommen nur gerade Exponenten vor, also gilt $f(-x)=f(x)$: Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse. Nullstellen: $x^2(x^2-8)=0 \Rightarrow x=0$ (doppelt) oder $x=\pm\sqrt{8}\approx\pm 2{,}83$.
b) $f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0$ oder $x=\pm 2$. Mit $f''(x)=12x^2-16$: $f''(0)=-16$, Hochpunkt $H(0\,|\,0)$; $f''(\pm 2)=32>0$, Tiefpunkte $T(\pm 2\,|\,-16)$.
c) $12x^2-16=0 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx\pm 1{,}15$.

$f\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\frac{16}{9}-\frac{32}{3}=-\frac{80}{9}\approx -8{,}89$. Wegen $f'''(x)=24x\neq 0$ an diesen Stellen sind es Wendepunkte $W_{1,2}\,(\pm 1{,}15\,|\,-8{,}89)$.
d) Der höchste Exponent ist gerade und der Leitkoeffizient positiv. Deshalb gilt $f(x)\to+\infty$ für $x\to\pm\infty$; der Graph hat die Form eines „W“.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $K(40)=80+80+60=220$; $K(80)=320+160+60=540$. Die Tabelle stimmt.
b) $G(x)=8x-0{,}05x^2-2x-60=-0{,}05x^2+6x-60$.
c) $G'=-0{,}1x+6=0 \Rightarrow x=60$; *G(60)=-180+360-60=120\,€*.
d) $G(x)=0 \Rightarrow x^2-120x+1200=0 \Rightarrow x=60\pm\sqrt{2400}\approx 60\pm 49{,}0$; Gewinn für 11 bis 109 Liter.
Begründung: Gewinn ist Erlös minus Kosten. Weil $G''=-0{,}1$, ist die Nullstelle von G' ein Maximum. Antwort: Bei 60 Litern ist der Gewinn mit 120 Euro am größten; Gewinn entsteht etwa zwischen 11 und 109 Litern.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $f_a'(x)=3x^2-3a$.
b) $3x^2=3a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$; zwei Extremstellen für $a>0$.
c) $a=0$: $f_0'=3x^2$, kein Vorzeichenwechsel: Sattelpunkt im Ursprung, keine Extrema.
d) a: $f_a'=3(x^2-a)>0$ für alle x: f_a ist streng monoton steigend, ohne Extrempunkt.
Merke: Die Anzahl der Extremstellen hängt vom Vorzeichen des Parameters ab, denn die Gleichung $x^2=a$ hat für $a>0$ zwei, für $a=0$ eine und für a keine Lösung. Für $a>0$ liegen der Hochpunkt bei $-\sqrt{a}$ und der Tiefpunkt bei $\sqrt{a}$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $f(1)=a+b=2$ und $f'(1)=3a+b=0$.
b) Subtraktion: $2a=-2$, $a=-1$, $b=3$.
c) $f(x)=-x^3+3x$, $f''(x)=-6x$; $f''(1)=-6$: Hochpunkt $H(1\,|\,2)$ bestätigt.
d) $f''=-6x=0 \Rightarrow x=0$, $f(0)=0$, $f'''=-6\neq 0$: Wendepunkt $W(0\,|\,0)$.
Merke: Ein Extrempunkt liefert immer zwei Bedingungen, nämlich den Funktionswert

und die waagerechte Tangente. Mit zwei Unbekannten a und b reicht das genau aus. Die Probe mit der zweiten Ableitung zeigt, ob wirklich ein Hochpunkt entsteht.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $f''=6x-6=0\Rightarrow x=1$; $f(1)=-2$; $W(1\,|\,-2)$.
b) $f(1+h)=(1+h)^3-3(1+h)^2=h^3-3h-2$ und $f(1-h)=-h^3+3h-2$. Die Summe ist $-4=2\cdot(-2)$.
c) Die Summe zweier gleich weit von $x=1$ entfernter Funktionswerte ist immer $2\cdot(-2)$: Der Graph ist punktsymmetrisch zu $W(1\,|\,-2)$.
Merke: Jede ganzrationale Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Deshalb liegen Hoch- und Tiefpunkt, hier $H(0\,|\,0)$ und $T(2\,|\,-4)$, symmetrisch zu $W(1\,|\,-2)$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Grundfläche $(30-2x)^2$, Höhe x: $V(x)=x(30-2x)^2=4x^3-120x^2+900x$.
b) 0.
c) $V'(x)=12x^2-240x+900=0\Rightarrow x^2-20x+75=0\Rightarrow x=5$ oder $x=15$. Nur $x=5$ liegt im Definitionsbereich; $V''(5)=24\cdot5-240=-120$: Maximum.
d) $V(5)=5\cdot20^2=2000\,\text{cm}^3$, also 2 Liter.
Begründung: Die ausgeschnittenen Quadrate dürfen höchstens halb so breit wie das Blech sein, sonst bleibt keine Grundfläche übrig. Die Randwerte $x=0$ und $x=15$ liefern das Volumen null. Antwort: Bei 5 cm großen Eckquadraten fasst die Schachtel mit zwei Litern am meisten.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Die Wachstumsgeschwindigkeit ist die Ableitung: $h'(t)=-0{,}06t^2+1{,}2t$ Zentimeter pro Tag.
b) Am schnellsten wächst die Pflanze, wo h' maximal ist, also an der Wendestelle von h: $h''(t)=-0{,}12t+1{,}2=0\Rightarrow t=10$. Wegen $h'''=-0{,}12\neq0$ liegt dort tatsächlich eine Wendestelle.
c) $h'(10)=-6+12=6$ cm pro Tag; die Höhe ist $h(10)=-20+60=40$ cm.
d) $h(20)=-160+240=80$ cm und $h'(20)=-24+24=0$. Nach 20 Tagen wächst die Pflanze im Modell nicht mehr; $t=20$ ist ein Hochpunkt von h.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $h=\frac{500}{\pi r^2}$.
b) $O(r)=2\pi r^2+\frac{1000}{r}$ mit $r>0$.
c) $O'(r)=4\pi r-\frac{1000}{r^2}=0\Rightarrow r^3=\frac{250}{\pi}\Rightarrow r\approx4{,}30$ cm; $O''>0$: Minimum.
d) $h=\frac{500}{\pi\cdot4{,}30^2}\approx8{,}60$ cm. Es gilt $h\approx2r$: Das Verhältnis ist ideal, wenn der Durchmesser gleich der Höhe ist.
Begründung: Die Nebenbedingung (festes Volumen) wird nach h aufgelöst und in die

Oberflächenformel eingesetzt. Wegen $O''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3} > 0$ liegt ein Minimum vor.
Antwort: Die Dose braucht am wenigsten Blech, wenn sie etwa $4{,}3$ cm Radius und $8{,}6$ cm Höhe hat.