Lösungen zur Klassenarbeit - Exponentialfunktionen und Eulersche Zahl

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Exponentielle Prozesse haben die Form $f(t) = a \cdot b^t$ mit Anfangswert a und Faktor b pro Zeitschritt.
a) Ein Zuwachs von $2\,\%$ pro Jahr ergibt $b = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$. Anfangswert 2000 €: $K(n) = 2000 \cdot 1{,}02^n$, n in Jahren (2 P.). Nach zehn Jahren wären das zum Beispiel $2000 \cdot 1{,}02^{10} \approx 2437{,}99$ €.
b) Eine Abnahme um $10\,\%$ pro Stunde lässt $90\,\%$ übrig, also $b = 0{,}9$. Mit 80 g Startmenge: $m(t) = 80 \cdot 0{,}9^t$, t in Stunden (2 P.). Beispiel: $m(1) = 72$ g. Häufiger Fehler: $b = 0{,}1$ einsetzen, das wäre eine Abnahme um $90\,\%$. Mit der Eulerschen Zahl lassen sich beide Funktionen auch als $2000\,e^{t \ln 1{,}02}$ und $80\,e^{t \ln 0{,}9}$ schreiben.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Man schreibt beide Seiten als Potenz derselben Basis: $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$. Aus $2^x = 2^{-4}$ folgt durch Exponentenvergleich $x = -4$ (1 P.).
b) Zuerst den Vorfaktor beseitigen: Division durch 5 ergibt $3^x = 9$. Wegen $9 = 3^2$ ist $x = 2$ (1 P.). Probe: $5 \cdot 3^2 = 45$.
c) Hier ist die Basis e, daher wendet man den natürlichen Logarithmus an, die Umkehrung der e-Funktion: $2x = \ln 9$ (1 P.). Mit $\ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3$ folgt $x = \ln 3 \approx 1{,}099$ (1 P.). Probe: $e^{2 \cdot 1{,}099} \approx e^{2{,}197} \approx 9$. Antwort: $x = -4$; $x = 2$; $x = \ln 3$.

Lösung zu Aufgabe 3 (3 BE/Punkte)

Grundregel: $(e^x)' = e^x$. Für e^{kx} liefert die Kettenregel $(e^{kx})' = k\,e^{kx}$, die innere Ableitung k tritt also als Faktor vor.
a) $f(x) = 4e^{3x}$: Der konstante Faktor 4 bleibt erhalten, die innere Ableitung ist 3. $f'(x) = 4 \cdot 3\,e^{3x} = 12e^{3x}$ (1 P.).
b) Summandenweise: $(e^{-0{,}5x})' = -0{,}5e^{-0{,}5x}$ und $(x^3)' = 3x^2$ (1 P.). Zusammen $g'(x) = -0{,}5e^{-0{,}5x} + 3x^2$ (1 P.). Kontrolle an der Stelle 0: $g'(0) = -0{,}5$, der Graph von g fällt dort leicht, weil die fallende e-Funktion überwiegt. Häufiger Fehler: e^{3x} wie eine Potenz ableiten und $3x\,e^{3x-1}$ schreiben; die e-Funktion ist keine Potenzfunktion.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Pro Halbwertszeit von 6 h halbiert sich die Menge; nach t Stunden sind $\frac{t}{6}$ Halbwertszeiten vergangen: $N(t) = 240 \cdot 0{,}5^{t/6}$ (1 P.).

b) 18 h sind $\frac{18}{6} = 3$ Halbwertszeiten: $N(18) = 240 \cdot 0{,}5^3 = 240 \cdot 0{,}125 = 30$ mg (1 P.). Schrittweise: $240 \to 120 \to 60 \to 30$.
c) Die Gleichung $240 \cdot 0{,}5^{t/6} = 30$ ergibt $0{,}5^{t/6} = \frac{1}{8} = 0{,}5^3$, also $\frac{t}{6} = 3$ und $t = 18$ h (1 P.).
d) Der stündliche Faktor ist $0{,}5^{1/6} \approx 0{,}891$ (1 P.). Pro Stunde bleiben $89{,}1\,\%$, abgebaut werden etwa $10{,}9\,\%$ (1 P.). Nicht $\frac{50\,\%}{6} \approx 8{,}3\,\%$, denn die Abnahme bezieht sich jede Stunde auf die schon verringerte Menge. Mit e geschrieben: $N(t) = 240\,e^{-0{,}1155t}$.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Anna: $3000 \cdot 1{,}035^{20} \approx 3000 \cdot 1{,}9898 \approx 5969$ €. Ben: $3000 \cdot 1{,}03^{20} \approx 3000 \cdot 1{,}8061 \approx 5418$ € (2 P.). Anna hat ihr Geld fast verdoppelt.
b) Bedingung $3000 \cdot 1{,}035^n > 4500$, also $1{,}035^n > 1{,}5$. Logarithmieren (der Logarithmus ist streng monoton wachsend, die Ungleichung bleibt erhalten): $n > \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}035} \approx 11{,}8$. Da Zinsen jährlich gutgeschrieben werden, hat Anna nach 12 Jahren erstmals mehr als 4500 € (1 P.).
c) Unterschied nach 20 Jahren: $5969 - 5418 \approx 551$ € (1 P.). Ein halber Prozentpunkt mehr Zins bringt also gut 550 €, mehr als $18\,\%$ des Startkapitals. Der Abstand wächst mit der Laufzeit immer weiter, weil beide Guthaben exponentiell, aber mit verschiedenen Faktoren wachsen.