Lernzettel - Exponentialfunktionen und Eulersche Zahl

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Das Schachbrett und die Seerosen

Auf einem Teich wächst eine Seerose. Ihre Fläche verdoppelt sich jeden Tag. Nach dreißig Tagen ist der ganze Teich bedeckt. Wann war er zur Hälfte bedeckt? Nicht am fünfzehnten Tag, sondern am neunundzwanzigsten! Solche Vorgänge nennt man **exponentielles Wachstum**: In gleichen Zeitabständen wächst die Größe um denselben *Faktor*. Ob Zinseszins, Bakterien, Follower in sozialen Netzwerken oder der Zerfall eines Medikaments im Körper: Alle diese Vorgänge beschreibst du mit Exponentialfunktionen. Die Eulersche Zahl e macht dabei das Rechnen mit Ableitungen besonders einfach.

Exponentielles Wachstum

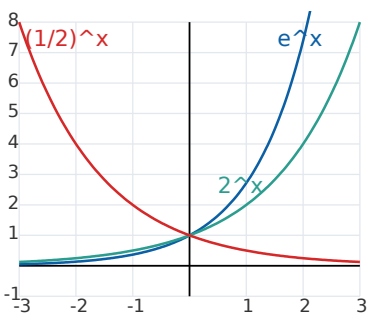
Viele Vorgänge verändern sich um denselben Faktor pro Zeitschritt: Bakterien verdoppeln sich, ein Guthaben wächst mit Zinsen, ein Medikament wird im Körper abgebaut. Solche Vorgänge beschreibt eine **Exponentialfunktion**

$$f(x) = a \cdot b^x \quad (a \neq 0,\ b > 0,\ b \neq 1).$$

Dabei ist $a = f(0)$ der Anfangswert und b der **Wachstumsfaktor**. Für $b > 1$ liegt Wachstum vor, für 0 Abnahme. Die Prozentrate p hängt über $b = 1 + \frac{p}{100}$ mit dem Faktor zusammen: Bei $+5\,\%$ ist $b = 1{,}05$, bei $-12\,\%$ ist $b = 0{,}88$.

Eigenschaften der Graphen

- Der Graph von $f(x) = b^x$ geht durch $(0\,|\,1)$ und liegt immer oberhalb der x-Achse: keine Nullstellen, Wertebereich $]0;\infty[$.
- Die x-Achse ist waagerechte Asymptote.
- Für $b > 1$ streng monoton wachsend, für 0 streng monoton fallend.
- Die Graphen von b^x und $\left(\frac{1}{b}\right)^x$ liegen spiegelbildlich zur y-Achse.



Die Abbildung zeigt e^x, 2^x und $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Einfache Exponentialgleichungen

Lassen sich beide Seiten als Potenz zur gleichen Basis schreiben, vergleichst du die Exponenten: $2^x = 32 = 2^5 \Rightarrow x = 5$. Aus $3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2}$ folgt $x = -2$. Bei $5 \cdot 2^x = 40$ teilst du zuerst durch 5: $2^x = 8$, also $x = 3$.

Die Eulersche Zahl e

Unter allen Exponentialfunktionen gibt es genau eine Basis, bei der die Tangente im Punkt $(0\,|\,1)$ die Steigung 1 hat. Diese Basis ist die **Eulersche Zahl**

$$e \approx 2{,}71828\ldots$$

Sie ist irrational wie π. Die Funktion $f(x) = e^x$ heißt **natürliche Exponentialfunktion** oder e-Funktion. Ihre Besonderheit: Sie ist ihre eigene Ableitung,

$$(e^x)' = e^x.$$

Daraus folgt für jede Stelle: Die Steigung der Tangente ist gleich dem Funktionswert. Für $c \cdot e^x$ gilt $(c\,e^x)' = c\,e^x$, und für die Summe $(e^x + x^2)' = e^x + 2x$.

Lineare Verkettung

Für $f(x) = e^{kx}$ mit einer Konstanten k gilt $f'(x) = k\,e^{kx}$ (der Faktor k kommt aus der Verkettung mit kx). Beispiele: $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$, $(3e^{0{,}5x})' = 1{,}5\,e^{0{,}5x}$. Die allgemeine Kettenregel lernst du später.

Der natürliche Logarithmus

Die Gleichung $e^x = a$ mit $a > 0$ löst du mit dem **natürlichen Logarithmus**: $x = \ln a$. Er ist die Umkehrung der e-Funktion: $\ln(e^x) = x$ und $e^{\ln a} = a$. Beispiel:
$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5 \approx 1{,}609$. Für $e^{2x} = 7$ ist $2x = \ln 7$, also $x = \frac{\ln 7}{2} \approx 0{,}973$. Für allgemeine Basen gilt $b^x = a \Rightarrow x = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Wachstumsprozesse

Ein Bestand mit stetigem Wachstum wird durch $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ beschrieben. Für $k > 0$ wächst er, für k nimmt er ab. Die **Verdopplungszeit** T erfüllt $e^{kT} = 2$, also $T = \frac{\ln 2}{k}$.
Beispiel: $N(t) = 200e^{0{,}03t}$. Dann ist $N(10) = 200e^{0{,}3} \approx 270$ und $T = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$. Bei Abnahme heißt die entsprechende Größe **Halbwertszeit**: $m(t) = m_0 \cdot 0{,}5^{t/T_H}$.

Beispiel (Abkühlung). Ein Getränk hat die Temperatur $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ (in °C, t in Minuten). Anfangs gilt $T(0) = 80$. Nach 10 Minuten ist $T(10) = 20 + 60e^{-1} \approx 42{,}1$. Auf lange Sicht nähert sich die Temperatur der Raumtemperatur 20 °C.

Exponentielles, lineares und quadratisches Wachstum

Beim linearen Wachstum kommt pro Zeitschritt immer dieselbe Zahl dazu, beim exponentiellen Wachstum dagegen immer derselbe Faktor. Deshalb wächst eine Exponentialfunktion auf lange Sicht schneller als jede Potenzfunktion. Das siehst du an der

Tabelle von 2^x und x^2: Bei $x = 2$ und $x = 4$ sind die Werte gleich, ab $x = 5$ liegt 2^x vorn und der Abstand wächst immer weiter. Erkennen kannst du exponentielles Wachstum in Wertetabellen daran, dass der Quotient aufeinanderfolgender Werte konstant ist: $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

Zinseszins als Beispiel

Ein Guthaben K_0 wächst bei jährlichem Zinssatz $p\,\%$ nach n Jahren auf $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. Bei 1000 € und 3 % sind das nach 10 Jahren etwa 1343,92 €. Die Zinsen werden selbst wieder verzinst, deshalb spricht man vom Zinseszins. Eine Verdopplung dauert bei 3 % etwa $\frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$ Jahre.

Definition: Exponentialfunktion

Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a \neq 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion**. Der Anfangswert $a = f(0)$ ist der Funktionswert bei $x = 0$, die **Basis** b ist der Wachstumsfaktor pro Einheit. Für $b > 1$ wächst die Funktion, für 0 fällt sie (Zerfall).

Merke: Wachstumsfaktor und Prozentsatz

Wächst eine Größe pro Zeitschritt um $p\,\%$, ist der Wachstumsfaktor $b = 1 + \frac{p}{100}$. Nimmt sie um $p\,\%$ ab, ist $b = 1 - \frac{p}{100}$. Beispiele: $+3\,\%$ bedeutet $b = 1{,}03$; $-8\,\%$ bedeutet $b = 0{,}92$. Nach n Schritten gilt $N(n) = N_0 \cdot b^n$.

So gehst du vor: Exponentialgleichungen lösen

1. Bringe die Gleichung auf die Form $b^x = c$ (isoliere die Potenz).
2. Lässt sich c als Potenz von b schreiben (zum Beispiel $32 = 2^5$), vergleiche die Exponenten.
3. Sonst logarithmiere: $x = \frac{\ln c}{\ln b}$. Dabei ist $\ln$ der natürliche Logarithmus.
4. Mache die Probe durch Einsetzen.

Beispiel 5

Ein Guthaben von *1000\,€* wird mit $3\,\%$ pro Jahr verzinst. Nach wie vielen Jahren hat es sich verdoppelt?

Ansatz: $1000 \cdot 1{,}03^n = 2000 \Rightarrow 1{,}03^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}45$. Nach etwa $23{,}5$ Jahren, also im 24. Jahr, ist das Guthaben verdoppelt. Als Faustregel gilt: Verdopplungszeit $\approx \frac{70}{p}$ Jahre, hier $\frac{70}{3} \approx 23{,}3$.

Beispiel 6

Koffein wird im Körper mit einer Halbwertszeit von 5 Stunden abgebaut. Eine

Tasse Kaffee enthält 100 mg. Wie viel ist nach 12 Stunden noch da?

Mit der Halbwertszeit gilt $N(t) = 100 \cdot 0{,}5^{t/5}$. Für $t = 12$: $100 \cdot 0{,}5^{2{,}4} \approx 18{,}9$ mg. Nach zehn Stunden wären es genau 25 mg, nach fünfzehn Stunden $12{,}5$ mg.

Definition: Eulersche Zahl

Die **Eulersche Zahl** ist $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828$. Sie ist die Basis, für die die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ an der Stelle 0 die Steigung 1 hat. Daraus folgt eine einzigartige Eigenschaft: **Die Ableitung von e^x ist wieder e^x.**

Satz: Ableiten mit der e-Funktion

Es gilt $(e^x)' = e^x$ und allgemein $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$. Mit der Faktorregel folgt $(a \cdot e^{kx})' = a\,k\,e^{kx}$. Beispiele: $(3e^x)' = 3e^x$; $(e^{2x})' = 2e^{2x}$; $(e^{-x})' = -e^{-x}$; $(5e^{0{,}1x})' = 0{,}5e^{0{,}1x}$. Die Funktion e^{kx} wächst also mit einer Rate, die proportional zu ihrem Bestand ist.

Beispiel 7

Für $f(x) = e^x$ soll die Tangente im Punkt $P(0\,|\,1)$ bestimmt werden.

Wegen $f'(x) = e^x$ ist $f'(0) = 1$. Die Tangente lautet $y = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x + 1$. Für kleine x gilt also $e^x \approx 1 + x$. Für $x = 0{,}1$ liefert die Näherung $1{,}1$, der genaue Wert ist $1{,}1052$.

Definition: Natürlicher Logarithmus

Die Lösung der Gleichung $e^x = c$ (mit $c > 0$) heißt **natürlicher Logarithmus** von c, geschrieben $x = \ln c$. Es gilt $\ln(e^x) = x$ und $e^{\ln c} = c$. Damit löst du Gleichungen der Form $a \cdot e^{kx} = c$: Teile durch a, logarithmiere, teile durch k.

Beispiel 8

Löse $3e^{0{,}5x} = 12$.

Teile durch 3: $e^{0{,}5x} = 4$. Logarithmiere: $0{,}5x = \ln 4$. Also $x = 2\ln 4 \approx 2{,}77$. Probe: $3e^{1{,}386} = 3 \cdot 4 = 12$.

Beispiel 9

Die Einwohnerzahl einer Kleinstadt sinkt jedes Jahr um $2\,\%$. Heute leben dort $25\,000$ Menschen. Wie viele sind es in 15 Jahren, und wann sind es nur noch $20\,000$?

Der Faktor ist $b = 0{,}98$, also $E(n) = 25\,000 \cdot 0{,}98^n$. Nach 15 Jahren: $25\,000 \cdot 0{,}98^{15} \approx 18\,466$. Für $20\,000$ Einwohner gilt $0{,}98^n = 0{,}8$, also $n = \frac{\ln 0{,}8}{\ln 0{,}98} \approx 11{,}0$.

Nach etwa elf Jahren leben dort nur noch $20\,000$ Menschen. Beachte: Die Abnahme pro Jahr wird in absoluten Zahlen kleiner, weil sie immer $2\,\%$ vom aktuellen Wert beträgt; deshalb ist der Graph eine fallende Kurve, keine Gerade.

Merke: Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

Für Potenzen mit gleicher Basis gilt $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ und $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$. Außerdem ist $b^0 = 1$ und $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$. Beim natürlichen Logarithmus gelten die zugehörigen Regeln: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ und $\ln(a^n) = n \cdot \ln a$. Die letzte Regel brauchst du, wenn du eine Gleichung der Form $b^x = c$ nach x auflöst: Aus $x \cdot \ln b = \ln c$ folgt $x = \frac{\ln c}{\ln b}$.

Hinweis: Wahl des Modells

Nicht jeder Wachstumsvorgang ist exponentiell. Prüfe an einer Tabelle, ob die **Quotienten** aufeinanderfolgender Werte gleich sind (dann exponentiell) oder die **Differenzen** gleich sind (dann linear). Bei Aufgaben zu realen Daten solltest du außerdem kommentieren, wie lange das Modell sinnvoll ist: Ein Bakterienwachstum endet spätestens, wenn die Nährstoffe verbraucht sind. Begrenztes Wachstum und logistisches Wachstum behandelt man später in der Qualifikationsphase.

Achtung

Verwechsle die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ nicht mit der Potenzfunktion $g(x) = x^2$! Bei 2^x steht die Variable im **Exponenten**, die Ableitungsregel $n \cdot x^{n-1}$ gilt hier nicht. Ebenso ist $(e^x)'$ nicht $x \cdot e^{x-1}$, und $\ln(a + b)$ ist nicht $\ln a + \ln b$. Nur für Produkte gilt $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$.

Merke: Wachstumsarten im Vergleich

Bei **linearem** Wachstum kommt pro Zeitschritt dieselbe Größe hinzu, bei **exponentiellem** Wachstum derselbe Faktor. Zu Beginn kann lineares Wachstum größer sein, aber jede Exponentialfunktion mit $b > 1$ überholt irgendwann jede lineare und jede quadratische Funktion. Deshalb sind exponentielle Prozesse so gefährlich (Seerose, Infektionen) oder so mächtig (Zinseszins, Lernen).

Wusstest du?

Leonhard Euler (1707–1783) führte den Buchstaben e ein. Bereits Jakob Bernoulli stieß auf die Zahl, als er untersuchte, was passiert, wenn eine Bank die Zinsen immer öfter im Jahr gutschreibt: bei $100\,\%$ Zins und n Zahlungen im Jahr wächst *1\,€* auf $(1 + \frac{1}{n})^n$ Euro, bei beliebig oft angewendeter Verzinsung (stetiger Verzinsung) auf *e\approx2{,}718\,€*.

Häufige Fehler

- b mit der Prozentrate verwechseln: Aus $+5\,\%$ wird $b = 1{,}05$, nicht $0{,}05$.
- e^x mit x^e oder mit $x \cdot e^{x-1}$ ableiten wollen: $(e^x)' = e^x$, die Potenzregel gilt hier nicht.
- Den Faktor k bei $(e^{kx})'$ vergessen.
- Den Logarithmus auf Summen anwenden: $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$.
- Den Taschenrechner im falschen Modus benutzen; e^x und $\ln$ sind eigene Tasten.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$: a ist der Anfangswert, b der Wachstumsfaktor pro Einheit.
- $p\,\%$ Zunahme bedeutet $b = 1 + \frac{p}{100}$, $p\,\%$ Abnahme $b = 1 - \frac{p}{100}$.
- Graph von b^x: geht durch $(0\,|\,1)$, hat die x-Achse als Asymptote, ist für $b > 1$ steigend und für 0 fallend.
- Exponentialgleichungen: Potenz isolieren, Exponenten vergleichen oder logarithmieren $x = \frac{\ln c}{\ln b}$.
- Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718$; $(e^x)' = e^x$ und $(e^{kx})' = k\,e^{kx}$.
- Natürlicher Logarithmus: $e^x = c \Leftrightarrow x = \ln c$; $\ln$ und e^x sind Umkehrungen.
- Halbwertszeit T: $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{t/T}$; Verdopplungszeit entsprechend mit Faktor 2.
- Exponentielles Wachstum überholt langfristig jedes lineare und quadratische Wachstum.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Schreibe bei Wachstumsaufgaben zuerst den Anfangswert und den Faktor auf, bevor du rechnest. Mache dann immer eine Plausibilitätsprobe: Wächst der Bestand, muss das Ergebnis größer als der Anfangswert sein. Bei Abnahme muss es kleiner sein. So erkennst du Vorzeichenfehler im Exponenten sofort.

Zusammenfassung

Exponentialfunktionen $a \cdot b^x$ beschreiben Wachstum und Abnahme mit konstantem Faktor. Die Zahl e ist die Basis, bei der $f' = f$ gilt. Mit $\ln$ löst du Gleichungen der Form $e^x = a$. Diese Funktionen begleiten dich in der Oberstufe bei Wachstumsmodellen, Zerfallsprozessen und später bei der Integralrechnung. Prüfe bei jeder Aufgabe, ob ein Prozentwert als Faktor eingesetzt werden muss, ob die Zeit in der richtigen Einheit angegeben ist und ob dein Ergebnis zur Sachsituation passt. Notiere zum Schluss einen Antwortsatz mit Einheit, damit die Lehrkraft dein Ergebnis sofort versteht und bewerten kann.