Arbeitsblatt - Exponentialfunktionen und Eulersche Zahl

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Funktionswerte von Exponentialfunktionen

Gegeben ist $f(x) = 2^x$. Berechne ohne Taschenrechner, wo möglich, und runde sonst auf drei Nachkommastellen.

a) $f(0)$ und $f(3)$
b) $f(-2)$
c) $f(0{,}5)$
d) Für welches x gilt $f(x) = 64$?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Bakterien in der Petrischale

Eine Bakterienkultur hat anfangs 500 Zellen und verdoppelt sich jede Stunde.

a) Gib die Funktion $N(t)$ an.
b) Berechne die Zellzahl nach 4 Stunden.
c) Nach wie vielen Stunden sind es mehr als $10\,000$ Zellen?
d) Wie viele Zellen waren es eine Stunde vor Beobachtungsbeginn?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Zinseszins auf dem Sparbuch

Familie Weber legt *1000*\,€ zu $3\,\%$ Zinsen im Jahr an und lässt die Zinsen stehen.

a) Gib die Funktion $K(n)$ an.
b) Berechne das Guthaben nach 10 Jahren.
c) Nach wie vielen Jahren hat sich das Guthaben verdoppelt?
d) Wie viel Euro Zinsen sind in den ersten 10 Jahren entstanden, und was hätte man ohne Zinseszins (einfache Zinsen) bekommen?

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Exponentialgleichungen

Löse ohne Taschenrechner, indem du beide Seiten als Potenz derselben Basis schreibst.

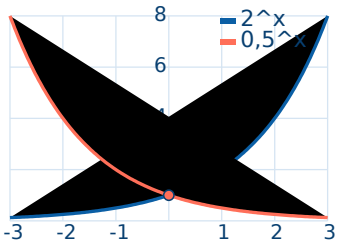
a) $2^x = 32$

b) $3^x = \frac{1}{9}$
c) $4^x = 8$
d) $5^{2x} = 125$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Eigenschaften der Graphen

Die Abbildung zeigt die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 0{,}5^x$.



a) Welche Punkte haben beide Graphen gemeinsam?
b) Wie hängen die beiden Graphen geometrisch zusammen?
c) Welche Gerade ist die waagerechte Asymptote? Was bedeutet das für den Wertebereich?
d) Berechne $f(3) \cdot g(3)$ und erkläre das Ergebnis.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Prozent und Wachstumsfaktor

Ergänze die Tabelle und gib jeweils die Funktion an.

Vorgang	Änderung pro Jahr	Faktor b
Guthaben	+5 %	?
Einwohnerzahl einer Kleinstadt	−2 %	?
Mieten	+3,5 %	?
Wert eines Autos	−12 %	?

a) Bestimme die Wachstumsfaktoren.
b) Das Auto kostet neu *24\,000\,€*. Gib seinen Wert nach n Jahren an.
c) Wie viel ist das Auto nach 5 Jahren noch wert?
d) Nach wie vielen Jahren ist der Wert auf die Hälfte gesunken?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Koffein im Körper

Eine Tasse Kaffee enthält 100 mg Koffein. Die Halbwertszeit beträgt etwa 5 Stunden.

a) Gib die Funktion $N(t)$ an (t in Stunden).
b) Wie viel Koffein ist nach 10 Stunden noch im Körper?

c) Wie viel nach 12 Stunden?
d) Nach wie vielen Stunden sind nur noch 10 mg übrig?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Follower im Netz

Das Profil eines Sportvereins hat 800 Follower und wächst jede Woche um $12\,\%$.

a) Gib die Funktion an.
b) Wie viele Follower sind es nach 6 Wochen?
c) Nach wie vielen Wochen sind es mehr als 5000?
d) Wie lange dauert es, bis sich die Zahl verdoppelt hat?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Seerosen im Teich

Die Fläche einer Seerosenpflanze verdoppelt sich jeden Tag. Nach 30 Tagen ist der Teich ganz bedeckt.

a) Wann war der Teich zur Hälfte bedeckt?
b) Wann war er zu einem Viertel bedeckt?
c) Wie viel Prozent des Teiches waren nach 25 Tagen bedeckt?
d) Warum ist das Wachstum gefährlich, obwohl man lange kaum etwas sieht?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Eulersche Zahl nähern

Berechne die Terme $(1+\frac{1}{n})^n$ für wachsende n:

n	1	10	100	1000	10000
$(1+\frac{1}{n})^n$	2{,}0000	2{,}5937	2{,}7048	2{,}7169	2{,}7181

a) Prüfe zwei Werte der Tabelle mit dem Taschenrechner.
b) Was fällt auf?
c) Bestimme e auf drei Nachkommastellen mit $n = 10\,000$ und vergleiche mit dem genauen Wert $2{,}71828$.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Ableiten mit der e-Funktion

Bestimme die Ableitungen. Benutze $(e^{kx})' = k\,e^{kx}$.

a) $f(x) = e^x + x$
b) $g(x) = 3e^{2x}$
c) $h(x) = e^{-x}$
d) $k(x) = 5e^{0{,}1x} - x^2$

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Mit dem natürlichen Logarithmus lösen

Löse die Gleichungen. Runde auf drei Nachkommastellen.

a) $e^{x} = 5$
b) $3e^{x} = 12$
c) $e^{2x} = 7$
d) $2e^{-x} = 1$

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Stetige und jährliche Verzinsung

Ein Kapital von *1000\,€* wird (a) jährlich mit $4\,\%$ verzinst, (b) stetig nach $K(t) = 1000 \cdot e^{0{,}04t}$.

a) Berechne beide Guthaben nach 10 Jahren.
b) Um wie viel Euro unterscheiden sich die Werte?
c) Berechne den Faktor pro Jahr bei der stetigen Verzinsung und den effektiven Zinssatz.
d) Wann sind bei stetiger Verzinsung *2000\,€* erreicht?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Luftdruck am Berg

Der Luftdruck nimmt mit der Höhe ab. Näherungsweise gilt $p(h) = 1013 \cdot e^{-h/8000}$ (in Hektopascal, h in Metern).

a) Berechne den Druck auf der Zugspitze (2962 m).
b) Berechne den Druck in 8000 m Höhe.
c) In welcher Höhe ist der Druck nur noch halb so groß wie am Boden?
d) Bestimme die Änderungsrate $p'(h)$ und berechne sie am Boden.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Drei Wachstumsarten

Eine Firma vergleicht drei Prognosen für die Zahl der Kunden.

t	0	1	2	3	4	5	6
linear $100 + 50t$	100	150	200	250	300	350	400
quadratisch $100 + 10t^2$	100	110	140	190	260	350	460
exponentiell $100 \cdot 1{,}5^t$	100	150	225	338	506	759	1139

a) Prüfe zwei Tabellenwerte durch Einsetzen.
b) Welche Prognose liefert zu Beginn den größten Wert, welche am Ende?
c) Ab welchem t übersteigt die exponentielle Prognose die lineare?

d) Beschreibe den Unterschied der Wachstumsarten in je einem Satz.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Der Kaffee in der Kantine

Die Temperatur eines Kaffees folgt dem Gesetz $T(t) = 20 + 60 \cdot e^{-0{,}1t}$ (t in Minuten, T in °C). Die Raumtemperatur beträgt 20 °C.

a) Welche Temperatur hat der Kaffee zu Beginn?
b) Wie warm ist er nach 10 Minuten?
c) Wann ist er auf 30 °C abgekühlt?
d) Bestimme $T'(t)$ und deute den Wert $T'(0)$.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Videoaufrufe

Ein Video hat am Starttag 50 Aufrufe. Die Zahl der Aufrufe verdoppelt sich alle zwei Tage.

a) Gib die Funktion $A(t)$ an (t in Tagen).
b) Wie viele Aufrufe gibt es nach 10 Tagen?
c) Nach wie vielen Tagen sind es mehr als $100\,000$?
d) Wie realistisch ist das Modell? Begründe in einem Satz.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Zwei Sparangebote

Eine Bank bietet zwei Anlagen mit *5000\,€* an: A mit $2{,}5\,\%$ Zinsen jährlich, B mit $0{,}2\,\%$ Zinsen pro Monat.

a) Berechne den Endbetrag von A nach 10 Jahren.
b) Berechne den Endbetrag von B nach 10 Jahren (120 Monate).
c) Welche Anlage ist besser und um wie viel?
d) Wie hoch müsste der Monatszins sein, damit B gleichwertig zu A ist?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Funktion aus zwei Punkten

Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ geht durch $P(0\,|\,3)$ und $Q(2\,|\,12)$.

a) Bestimme a.
b) Bestimme b (mit $b > 0$).
c) Berechne $f(5)$.
d) Wie lautet die Funktion, wenn der Graph stattdessen durch $P(0\,|\,3)$ und $Q(2\,|\,\frac{4}{3})$ geht?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Warum ist (e hoch x) gleich seiner Ableitung?

Für $f(x) = a^x$ gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$. Die Ableitung ist also a^x mal der Zahl $c(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$.

a) Berechne $\frac{2^h-1}{h}$ für $h = 0{,}01$.

b) Berechne $\frac{3^h-1}{h}$ für $h = 0{,}01$.

c) Berechne $\frac{e^h-1}{h}$ für $h = 0{,}01$.

d) Was zeichnet die Basis e aus?