Lösungen - Exponentialfunktionen und Eulersche Zahl

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) Jede Zahl hoch null ergibt eins, also $f(0) = 2^0 = 1$. Außerdem $f(3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
b) Ein negativer Exponent bedeutet den Kehrwert: $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
c) Der Exponent $\frac{1}{2}$ bedeutet die Quadratwurzel: $f(0{,}5) = 2^{1/2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$.
d) Wir schreiben 64 als Zweierpotenz: $64 = 2^6$. Aus $2^x = 2^6$ folgt durch Exponentenvergleich $x = 6$.
Merke: Der Graph von 2^x geht immer durch $(0\,|\,1)$, und jeder Schritt um 1 nach rechts verdoppelt den Funktionswert.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Anfangswert 500, Wachstumsfaktor 2 pro Stunde: $N(t) = 500 \cdot 2^t$ mit t in Stunden.
b) $N(4) = 500 \cdot 2^4 = 500 \cdot 16 = 8000$ Zellen.
c) $500 \cdot 2^t > 10\,000 \Leftrightarrow 2^t > 20 \Leftrightarrow t > \log_2 20 \approx 4{,}32$. Kontrolle: Nach vier Stunden sind es 8000, nach fünf Stunden $16\,000$ Zellen. Im Lauf der fünften Stunde wird die Grenze überschritten.
d) Eine Stunde vorher entspricht $t = -1$: $N(-1) = 500 \cdot 2^{-1} = 250$ Zellen. Rückwärts in der Zeit halbiert sich die Zahl jede Stunde.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Zinssatz $3\,\%$ bedeutet Wachstumsfaktor $1{,}03$. Also $K(n) = 1000 \cdot 1{,}03^n$ mit n in Jahren.
b) *K(10)=1000\cdot1{,}03^{10}\approx1343{,}92\,€*.
c) $1000 \cdot 1{,}03^n = 2000 \Leftrightarrow 1{,}03^n = 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}45$. Nach 24 Jahren ist das Guthaben erstmals mehr als doppelt so groß.
d) Mit Zinseszins entstehen *1343{,}92-1000=343{,}92\,€* Zinsen. Einfache Zinsen wären jedes Jahr *30\,€*, also *300\,€*. Der Zinseszinseffekt bringt *43{,}92\,€* zusätzlich, weil auch die Zinsen verzinst werden.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $32 = 2^5$, also $2^x = 2^5$. Gleiche Basis, also gleiche Exponenten: $x = 5$.
b) $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$. Also $x = -2$.
c) Beide Seiten zur Basis 2: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ und $8 = 2^3$. Also $2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.
d) $125 = 5^3$, also $5^{2x} = 5^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.
Merke: Gelingt es, beide Seiten als Potenz derselben Basis zu schreiben, darf man die Exponenten gleichsetzen. Sonst hilft der Logarithmus.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Für $x = 0$ gilt $2^0 = 0{,}5^0 = 1$. Beide Graphen gehen durch $P(0\,|\,1)$. Für $x > 0$ ist $2^x > 1 > 0{,}5^x$, für x umgekehrt; weitere gemeinsame Punkte gibt es nicht.
b) $g(x) = 0{,}5^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$. Die Graphen sind deshalb Spiegelbilder an der y-Achse.
c) Die x-Achse $y = 0$ ist waagerechte Asymptote. Die Funktionswerte kommen beliebig nahe an 0, erreichen sie aber nie. Der Wertebereich ist $]0;\infty[$.
d) $f(3) \cdot g(3) = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$. Allgemein gilt $2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = 1$ für jedes x.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Zunahme um $p\,\%$ ergibt den Faktor $1 + \frac{p}{100}$, Abnahme den Faktor $1 - \frac{p}{100}$: Guthaben $1{,}05$, Kleinstadt $0{,}98$, Mieten $1{,}035$, Auto $0{,}88$.
b) Anfangswert *24\,000\,€*, Faktor $0{,}88$: $W(n) = 24\,000 \cdot 0{,}88^n$.
c) *W(5)=24\,000\cdot0{,}88^5\approx12\,666\,€*. Nach fünf Jahren hat das Auto fast die Hälfte seines Werts verloren.
d) $0{,}88^n = 0{,}5 \Rightarrow n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}88} \approx 5{,}4$. Nach etwa $5{,}4$ Jahren ist der Wert halbiert; das ist die Halbwertszeit des Autowerts.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Alle 5 Stunden halbiert sich die Menge. Nach t Stunden sind $\frac{t}{5}$ Halbwertszeiten vergangen: $N(t) = 100 \cdot 0{,}5^{t/5}$.
b) 10 Stunden sind zwei Halbwertszeiten: $N(10) = 100 \cdot 0{,}5^2 = 25$ mg.
c) $N(12) = 100 \cdot 0{,}5^{2{,}4} \approx 18{,}9$ mg.
d) $100 \cdot 0{,}5^{t/5} = 10 \Leftrightarrow 0{,}5^{t/5} = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{t}{5} = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}5} \Rightarrow t \approx 16{,}6$ Stunden. Ein Kaffee am Nachmittag wirkt also noch bis tief in die Nacht nach.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Anfangswert 800, Wachstum $12\,\%$ pro Woche, also Faktor $1{,}12$: $F(n) = 800 \cdot 1{,}12^n$ mit n in Wochen.
b) $F(6) = 800 \cdot 1{,}12^6 \approx 1579$ Follower.
c) $800 \cdot 1{,}12^n > 5000 \Leftrightarrow 1{,}12^n > 6{,}25 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 6{,}25}{\ln 1{,}12} \approx 16{,}2$. Nach 17 Wochen sind es erstmals mehr als 5000.
d) $1{,}12^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}12} \approx 6{,}1$ Wochen. Die Verdopplungszeit hängt nicht vom Startwert ab.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Jeden Tag verdoppelt sich die Fläche. Rückwärts gedacht halbiert sie sich von Tag zu Tag. Am 29. Tag war der Teich zur Hälfte bedeckt.
b) Noch einen Tag früher, am 28. Tag, war ein Viertel bedeckt.
c) Von Tag 25 bis Tag 30 verdoppelt sich die Fläche fünfmal. Nach 25 Tagen war also

$\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \approx 3{,}1\,\%$ bedeckt.
d) Lange Zeit sieht man kaum Pflanzen. In den letzten fünf Tagen kommen aber $97\,\%$ der Fläche hinzu. Wer zu spät reagiert, kann das Zuwachsen nicht mehr aufhalten.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $n = 1$: $(1+1)^1 = 2$. $n = 10$: $1{,}1^{10} \approx 2{,}5937$. Beide Werte stimmen mit der Tabelle überein.
b) Die Werte wachsen mit n, aber immer langsamer. Sie nähern sich einer festen Zahl, der Eulerschen Zahl $e \approx 2{,}718$.
c) Für $n = 10\,000$ ergibt sich $2{,}7181$, auf drei Nachkommastellen $2{,}718$. Das stimmt mit $e = 2{,}71828\ldots$ überein; der Fehler ist kleiner als $0{,}0002$.
Hintergrund: Der Term beschreibt eine Verzinsung mit $100\,\%$, bei der das Jahr in n gleiche Abschnitte geteilt wird. Für sehr viele Abschnitte erhält man die stetige Verzinsung mit dem Faktor e.

Lösung zu Aufgabe 11

a) e^x ist ihre eigene Ableitung, x hat die Ableitung 1. Also $f'(x) = e^x + 1$.
b) Nach der Regel $(e^{kx})' = k\,e^{kx}$ mit $k = 2$ und dem Faktor 3: $g'(x) = 3 \cdot 2e^{2x} = 6e^{2x}$.
c) Hier ist $k = -1$: $h'(x) = -e^{-x}$. Die Funktion fällt überall.
d) $5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$ und $(x^2)' = 2x$. Also $k'(x) = 0{,}5e^{0{,}1x} - 2x$.
Merke: Der Faktor k im Exponenten wandert beim Ableiten als Vorfaktor nach vorne; der Exponent selbst bleibt unverändert.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrung von e^x: $x = \ln 5 \approx 1{,}609$.
b) Zuerst durch 3 teilen: $e^x = 4$. Dann $x = \ln 4 \approx 1{,}386$.
c) $e^{2x} = 7 \Rightarrow 2x = \ln 7 \Rightarrow x = \frac{\ln 7}{2} \approx 0{,}973$.
d) Durch 2 teilen: $e^{-x} = \frac{1}{2}$. Logarithmieren: $-x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, also $x = \ln 2 \approx 0{,}693$.
Probe für a): $e^{1{,}609} \approx 5$. Merke: Erst die Potenz allein auf eine Seite bringen, dann logarithmieren.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Jährlich: *1000\cdot1{,}04^{10}\approx1480{,}24\,€*. Stetig: *1000\cdot e^{0{,}04\cdot10}=1000\cdot e^{0{,}4}\approx1491{,}82\,€*.
b) *1491{,}82-1480{,}24=11{,}58\,€*. Die stetige Verzinsung bringt etwas mehr.
c) Pro Jahr wächst das Kapital stetig um den Faktor $e^{0{,}04} \approx 1{,}04081$. Das entspricht einem effektiven Jahreszins von etwa $4{,}08\,\%$, also etwas mehr als $4\,\%$.
d) $1000 \cdot e^{0{,}04t} = 2000 \Leftrightarrow e^{0{,}04t} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}04} \approx 17{,}3$ Jahre.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $p(2962) = 1013 \cdot e^{-2962/8000} = 1013 \cdot e^{-0{,}37} \approx 700$ hPa. Auf der Zugspitze ist der Druck

um fast ein Drittel geringer als am Meer.
b) $p(8000) = 1013 \cdot e^{-1} \approx 373$ hPa, also nur noch gut ein Drittel des Bodendrucks.
c) $e^{-h/8000} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{h}{8000} = -\ln 2 \Leftrightarrow h = 8000 \ln 2 \approx 5545$ m. In etwa $5{,}5$ km Höhe ist der Druck halbiert.
d) Kettenregel mit $k = -\frac{1}{8000}$: $p'(h) = -\frac{1013}{8000} e^{-h/8000}$. Am Boden: $p'(0) \approx -0{,}127$ hPa pro Meter, also etwa 1 hPa weniger pro 8 Höhenmeter.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Quadratisch bei $t = 6$: $100 + 10 \cdot 36 = 460$. Exponentiell bei $t = 4$: $100 \cdot 1{,}5^4 = 506{,}25 \approx 506$. Beide Werte stimmen.
b) Bei $t = 0$ starten alle bei 100. Bei $t = 1$ liegen linear und exponentiell mit 150 vorn. Bei $t = 6$ führt die exponentielle Prognose mit 1139 klar vor 460 und 400.
c) Bei $t = 2$ gilt $225 > 200$. Ab $t = 2$ liegt die exponentielle Prognose über der linearen, und der Abstand wächst rasch.
d) Linear: In jedem Schritt kommt derselbe Betrag dazu. Quadratisch: Die Zunahme wird von Schritt zu Schritt größer. Exponentiell: In jedem Schritt wird mit demselben Faktor multipliziert; langfristig wächst das am schnellsten.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $T(0) = 20 + 60 \cdot e^0 = 20 + 60 = 80$ °C.
b) $T(10) = 20 + 60e^{-1} \approx 20 + 22{,}1 = 42{,}1$ °C.
c) $20 + 60e^{-0{,}1t} = 30 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow t = 10 \ln 6 \approx 17{,}9$ min. Nach knapp 18 Minuten hat der Kaffee 30 °C.
d) $T'(t) = 60 \cdot (-0{,}1) e^{-0{,}1t} = -6e^{-0{,}1t}$. $T'(0) = -6$: Zu Beginn kühlt der Kaffee um 6 °C pro Minute ab. Später wird die Abkühlung langsamer, die Temperatur nähert sich 20 °C.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Verdopplung alle 2 Tage: Nach t Tagen gab es $\frac{t}{2}$ Verdopplungen. $A(t) = 50 \cdot 2^{t/2}$.
b) $A(10) = 50 \cdot 2^5 = 50 \cdot 32 = 1600$ Aufrufe.
c) $50 \cdot 2^{t/2} > 100\,000 \Leftrightarrow 2^{t/2} > 2000 \Leftrightarrow t > 2 \log_2 2000 \approx 21{,}9$. Ab dem 22. Tag sind es mehr als $100\,000$ Aufrufe.
d) Das Modell taugt nur für kurze Zeit. Die Zahl der interessierten Menschen ist begrenzt, deshalb flacht das Wachstum irgendwann ab (beschränktes Wachstum).

Lösung zu Aufgabe 18

a) *5000\cdot1{,}025^{10}\approx6400{,}42\,€*.
b) Monatlich mit Faktor $1{,}002$, 120 Monate: *5000\cdot1{,}002^{120}\approx6354{,}72\,€*.
c) *6400{,}42-6354{,}72\approx45{,}70\,€*. Anlage A ist besser, obwohl $12 \cdot 0{,}2\,\% = 2{,}4\,\%$ fast $2{,}5\,\%$ ergibt.
d) Gleichwertig heißt: $q^{12} = 1{,}025 \Rightarrow q = 1{,}025^{1/12} \approx 1{,}00206$. Der Monatszins müsste

etwa $0{,}206\,\%$ betragen.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Einsetzen von P: $f(0) = a \cdot b^0 = a = 3$.
b) Einsetzen von Q: $3b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$, denn $b > 0$. Also $f(x) = 3 \cdot 2^x$.
c) $f(5) = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$.
d) $3b^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow b^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$. Also $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Weil b, beschreibt diese Funktion eine Abnahme.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\frac{2^{0{,}01}-1}{0{,}01} \approx 0{,}6956$. Das liegt nahe bei $\ln 2 \approx 0{,}693$.
b) $\frac{3^{0{,}01}-1}{0{,}01} \approx 1{,}1047$, nahe bei $\ln 3 \approx 1{,}099$.
c) $\frac{e^{0{,}01}-1}{0{,}01} \approx 1{,}0050$, also fast genau 1.
d) Die Zahl $c(a)$ liegt für $a = 2$ unter 1, für $a = 3$ über 1. Genau für die Basis e zwischen 2 und 3 ist $c(e) = 1$. Deshalb gilt $(e^x)' = e^x$: Die e-Funktion stimmt mit ihrer Ableitung überein.