Lösungen zur Klassenarbeit - Einführung in die Integralrechnung

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Eine Stammfunktion F von f erfüllt $F' = f$. Für Potenzen gilt die Umkehrung der Potenzregel: x^n wird zu $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (für $n \neq -1$).

a) Summandenweise: $6 \cdot \frac{x^3}{3} = 2x^3$, $-4 \cdot \frac{x^2}{2} = -2x^2$, 1 wird zu x. Also $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x$ (1 P.). Probe: $F'(x) = 6x^2 - 4x + 1 = f(x)$ (1 P.). Jede weitere Stammfunktion unterscheidet sich nur um eine Konstante C.

b) Erst als Potenz schreiben: $g(x) = x^3 - x^{-2}$. Dann $\frac{x^4}{4}$ und $-\frac{x^{-1}}{-1} = x^{-1}$: $G(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x}$ (1 P.). Probe: $G'(x) = x^3 - x^{-2} = x^3 - \frac{1}{x^2}$, passt (1 P.). Häufiger Fehler: Vorzeichen beim Teilen durch -1 übersehen.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Nach dem Hauptsatz gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ mit einer beliebigen Stammfunktion F.

a) Stammfunktion von $3x^2 - 2$: $F(x) = x^3 - 2x$ (1 P.). Obere minus untere Grenze: $F(3) = 27 - 6 = 21$ und $F(1) = 1 - 2 = -1$, also $21 - (-1) = 22$ (1 P.). Die Klammer um $F(1)$ ist wichtig, sonst entsteht das falsche Ergebnis 20.

b) Stammfunktion von $x^3 + x$: $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$ (1 P.). $F(2) = \frac{16}{4} + \frac{4}{2} = 4 + 2 = 6$ und $F(0) = 0$, also $\int_0^2 (x^3 + x)\,\mathrm{d}x = 6$ (1 P.). Weil beide Integranden im jeweiligen Intervall positiv sind, entsprechen die Werte 22 und 6 den Flächen unter den Graphen. Antwort: 22 und 6.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen mit der x-Achse. $-x^2 + 4x = 0$ wird durch Ausklammern zu $-x(x - 4) = 0$, also $x = 0$ oder $x = 4$ (1 P.).

b) Die Parabel ist nach unten geöffnet; zwischen den Nullstellen verläuft sie oberhalb der x-Achse, das Integral ist dort positiv und gleich dem Flächeninhalt. Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ (1 P.). $F(4) = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$, $F(0) = 0$ (1 P.). Flächeninhalt: $A = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ FE (1 P.). Plausibilitätskontrolle: Das umschließende Rechteck mit Breite 4 und Scheitelhöhe $f(2) = 4$ hat 16 FE; eine Parabelfläche nimmt davon genau $\frac{2}{3}$ ein, und $\frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Die größte Zuflussrate findet man mit der Ableitung: $r'(t) = 6 - 2t = 0$ ergibt $t = 3$;

da $r''(t) = -2 < 0$, liegt ein Maximum vor. $r(3) = 18 - 9 = 9$ Liter pro Minute (1 P.).
b) Die zugeflossene Menge ist das Integral der Rate (rekonstruierter Bestand): $\int_0^6 (6t - t^2)\,\mathrm{d}t = \left[3t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^6 = 108 - 72 = 36$ Liter (2 P.).
c) Zum Anfangsbestand kommt der Zufluss hinzu: $20 + 36 = 56$ Liter (1 P.).
d) Mittlere Rate gleich Gesamtzufluss durch Zeit: $\frac{36}{6} = 6$ Liter pro Minute (1 P.). Das ist der Mittelwert der Funktion r auf $[0;6]$; ein Rechteck der Höhe 6 und Breite 6 hat dieselbe Fläche wie die Fläche unter r. Antwort: maximal 9 l/min bei $t = 3$; 36 l Zufluss; 56 l im Becken; 6 l/min im Mittel.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Stammfunktion von $2x$ ist x^2. Mit dem Hauptsatz: $\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^a = a^2 - 0^2 = a^2$ (1 P.). Geometrisch ist das die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit Grundseite a und Höhe $2a$, also $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$, dieselbe Formel.
b) Die Bedingung lautet nun $a^2 = 16$ (1 P.). Rechnerisch gibt es die Lösungen $a = 4$ und $a = -4$; verlangt ist aber $a > 0$, deshalb bleibt nur $a = 4$ (1 P.). Probe: $\int_0^4 2x\,\mathrm{d}x = 16 - 0 = 16$. Die negative Lösung hätte übrigens auch den Wert 16 geliefert, weil die Grenzen dann vertauscht sind und die Fläche unterhalb der Achse liegt. Antwort: $a = 4$.