Lernzettel - Einführung in die Integralrechnung

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Aus der Zuflussrate den Wasserstand berechnen

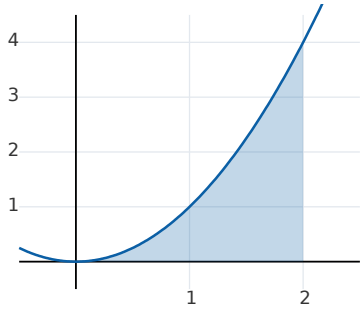
In ein Schwimmbecken fließt Wasser, aber der Zufluss ist nicht konstant: Am Anfang läuft es schnell, später langsamer. Du kennst die **Änderungsrate** (Liter pro Minute) und willst wissen, wie viel Wasser nach einer Stunde im Becken ist. Das ist die Umkehrung der Frage aus dem Ableitungskapitel: Dort kam die Rate aus dem Bestand, hier kommt der Bestand aus der Rate. Das Hilfsmittel heißt **Integral**. Es berechnet Bestandsänderungen, Wege aus Geschwindigkeiten, Energie aus Leistung und Flächeninhalte unter Graphen.

Vom Bestand zur Änderungsrate und zurück

Bisher kennst du die Ableitung: Aus einer Bestandsfunktion wird die Änderungsrate bestimmt, zum Beispiel aus dem Weg die Geschwindigkeit. Die Integralrechnung kehrt diesen Vorgang um. Aus einer bekannten Änderungsrate soll der Bestand **rekonstruiert** werden. Beispiel: Fließt Wasser mit der Rate $r(t)$ (in Litern pro Minute) in einen Tank, so interessiert dich, wie viel Wasser insgesamt hinzugekommen ist.

Ist die Rate konstant, rechnest du einfach: 5 Liter pro Minute über 12 Minuten ergeben $5 \cdot 12 = 60$ Liter. Das ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Breite 12 und der Höhe 5. Ist die Rate nicht konstant, entspricht die Zunahme dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von r und der x-Achse.

Flächeninhalt unter einem Graphen



Die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = x^2$ über $[0; 2]$ kannst du zuerst durch Rechtecke annähern. Teilst du das Intervall in $n = 4$ gleich breite Streifen der Breite $0{,}5$, erhältst du:

- **Untersumme** (Rechtecke unter dem Graphen): $0{,}5 \cdot (0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25) = 1{,}75$.
- **Obersumme** (Rechtecke über dem Graphen): $0{,}5 \cdot (0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 3{,}75$.

Der gesuchte Flächeninhalt liegt zwischen $1{,}75$ und $3{,}75$. Mit mehr Streifen rücken Unter- und Obersumme immer näher zusammen. Ihr gemeinsamer Grenzwert ist das **bestimmte**

Integral $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

Stammfunktion

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Ist F eine Stammfunktion, dann ist auch $F(x) + C$ mit beliebiger Konstante C eine, denn die Konstante fällt beim Ableiten weg. Für Potenzen gilt umgekehrt zur Potenzregel:

$$f(x) = x^n \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

Beispiele: $f(x) = x^2$ hat $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $f(x) = 4x^3$ hat $F(x) = x^4$, $f(x) = 5$ hat $F(x) = 5x$. Für Summen und konstante Faktoren gelten die bekannten Regeln: $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ hat $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$. Mache immer die **Probe durch Ableiten**.

Das bestimmte Integral

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist der Zuwachs von F zwischen a und b gleich dem Flächeninhalt (mit Vorzeichen) unter dem Graphen von f:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Dieser Zusammenhang heißt Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Konstante C spielt keine Rolle, denn sie hebt sich bei der Differenz auf.

Beispiel 1. $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$. Das passt zu den Schranken $1{,}75$ und $3{,}75$.

Beispiel 2. $\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = \big[x^2 + x\big]_1^3 = (9+3) - (1+1) = 10$.

Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse

Das Integral zählt Flächen oberhalb der x-Achse positiv und unterhalb negativ. Verläuft der Graph nur oberhalb der x-Achse, ist das Integral der Flächeninhalt. Verläuft er unterhalb, nimmst du den Betrag. Wechselt f im Intervall das Vorzeichen, musst du an den Nullstellen aufteilen.

Beispiel 3. Die Funktion $f(x) = 4 - x^2$ hat die Nullstellen ± 2 und liegt dazwischen oberhalb der x-Achse. Fläche: $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$.

Beispiel 4. Für $f(x) = x - 2$ auf $[0;4]$ gilt $\int_0^4 (x-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^4 = 0$. Die beiden Dreiecke mit je Flächeninhalt 2 heben sich auf, der gesamte Flächeninhalt ist $2 + 2 = 4$.

Bestand rekonstruieren

Ist r die Änderungsrate eines Bestands B mit Anfangsbestand $B(0)$, dann gilt $B(t) = B(0) + \int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s$. Beispiel: Ein Tank enthält anfangs 10 m³ Wasser, die Zuflussrate

beträgt $r(t) = 2t$ in m³ pro Stunde. Dann ist $B(t) = 10 + t^2$. Nach 5 Stunden sind $B(5) = 35$ m³ im Tank.

Anschaulich lässt sich das Vorgehen so merken: Die Ableitung beantwortet die Frage „wie schnell ändert sich der Bestand gerade?“, das Integral beantwortet die Frage „wie viel hat sich insgesamt geändert?“. Beide Rechenarten gehören zusammen wie Hin- und Rückweg. Deshalb ist der Weg über die Stammfunktion so wirkungsvoll: Du musst keine unendlich vielen Rechtecke addieren, sondern nur zwei Funktionswerte von F berechnen und voneinander abziehen.

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle x im Definitionsbereich gilt. Mit F ist auch $F + C$ mit einer beliebigen Konstanten C eine Stammfunktion, denn Konstanten fallen beim Ableiten weg. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich also nur um eine Konstante.

Satz: Stammfunktionen von Potenzfunktionen

Für $f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$ ist $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ eine Stammfunktion. Der Exponent wird um 1 größer, dann wird durch den neuen Exponenten geteilt. Faktorregel und Summenregel gelten wie beim Ableiten: $\int c\, f(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int (f + g) = \int f + \int g$.

Definition: Bestimmtes Integral

Ist F eine Stammfunktion von f, so heißt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** von f von a bis b. Man schreibt auch $[F(x)]_a^b$. Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl der Konstanten C ab, denn sie fällt bei der Differenz heraus. Das Integral ist ein **orientierter** Flächeninhalt: Teile unterhalb der x-Achse zählen negativ.

So gehst du vor: Ein bestimmtes Integral berechnen

1. Bestimme eine Stammfunktion F von f (jeden Summanden einzeln).
2. Setze die obere Grenze ein: $F(b)$.
3. Setze die untere Grenze ein: $F(a)$.
4. Berechne die Differenz $F(b) - F(a)$ und schreibe das Ergebnis mit Einheit.

Beispiel 5

Berechne $\int_1^3 (3x^2 - 2)\,\mathrm{d}x$.

Eine Stammfunktion ist $F(x) = x^3 - 2x$. Dann gilt $[x^3 - 2x]_1^3 = (27 - 6) - (1 - 2) = 21 - (-1) = 22$.

Beispiel 6

Berechne den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x) = -x^2 + 4$ und der x-Achse.

Die Nullstellen sind $x = \pm 2$, dazwischen liegt der Graph oberhalb der Achse. $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$. Es folgt $\int_{-2}^{2} f = F(2) - F(-2) = \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ Flächeneinheiten.

Beispiel 7

Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse von $x = 0$ bis $x = 3$.

Die Nullstelle bei $x = 2$ teilt die Fläche. Von 0 bis 2 liegt der Graph unterhalb der Achse: $\int_0^2 (x^2 - 4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3}$, Flächeninhalt $\frac{16}{3}$. Von 2 bis 3: $\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_2^3 = (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{7}{3}$. Gesamtfläche: $\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3} \approx 7{,}67$. Hätte man ohne Aufteilung $\int_0^3$ gerechnet, wäre -3 herausgekommen: falsch für den Flächeninhalt.

Merke: Rechenregeln für bestimmte Integrale

Für bestimmte Integrale gelten einfache Regeln, die dir viel Rechenarbeit sparen. Vertauschst du die Grenzen, wechselt das Vorzeichen: $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Ein Integral über ein Intervall der Länge null ist null: $\int_a^a f = 0$. Liegt c zwischen a und b, darfst du das Intervall zerlegen: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Bei der Zerlegung an Nullstellen entstehen genau die Teilflächen, die du einzeln betrachten musst. Außerdem gilt für Funktionen, die symmetrisch zur y-Achse sind (gerade Funktionen), $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

Beispiel 10

Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = 4x - 3$, deren Graph durch den Punkt $P(2\,|\,5)$ verläuft, und berechne damit $F(0)$.

Allgemein ist $F(x) = 2x^2 - 3x + C$. Aus $F(2) = 8 - 6 + C = 5$ folgt $C = 3$. Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x) = 2x^2 - 3x + 3$. Damit gilt $F(0) = 3$: Der Graph schneidet die y-Achse bei 3. Diese Aufgabe taucht oft bei Bestandsproblemen auf: Der Anfangsbestand legt die Konstante fest, die du beim unbestimmten Integrieren ergänzen musst.

Achtung

Zwischen den Nullstellen liegende Flächen müssen **einzeln** berechnet und als Beträge addiert werden. Wer einfach von der kleinsten bis zur größten Nullstelle integriert,

lässt positive und negative Teile sich gegenseitig aufheben. Auch die Konstante C wird beim bestimmten Integral weggelassen; beim unbestimmten Integral darfst du sie nicht vergessen. Und: $\int x^2\,\mathrm{d}x$ ist nicht $\frac{x^2}{2}$, sondern $\frac{x^3}{3}+C$.

Merke: Rekonstruktion eines Bestands

Ist $f(t)$ die momentane Änderungsrate eines Bestands (zum Beispiel Zufluss in Litern pro Minute), so ist $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ die **Änderung** des Bestands zwischen a und b. Der Bestand zur Zeit b ist $B(b)=B(a)+\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Wird der Zufluss durch den Abfluss verringert, rechnest du mit der Differenz von Zu- und Abflussrate.

Beispiel 8

Ein Tank enthält am Anfang 200 Liter. Der Zufluss beträgt $r(t)=0{,}6t$ Liter pro Minute ($0\le t\le 10$). Wie viel Wasser ist nach 10 Minuten im Tank?

Die Zunahme ist $\int_0^{10} 0{,}6t\,\mathrm{d}t=[0{,}3t^2]_0^{10}=30$ Liter. Der Bestand beträgt $200+30=230$ Liter. Die Rate steigt mit der Zeit, deshalb ist die Zunahme größer als die der ersten fünf Minuten ($7{,}5$ Liter).

Merke: Mittelwert einer Funktion

Der **Mittelwert** von f auf dem Intervall $[a;b]$ ist $\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Er ist die Höhe eines Rechtecks über $[a;b]$ mit demselben Flächeninhalt wie die Fläche unter dem Graphen. Bei einer Geschwindigkeit ist der Mittelwert die Durchschnittsgeschwindigkeit, bei einer Temperaturkurve die Durchschnittstemperatur.

Beispiel 9

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Radfahrers mit $v(t)=0{,}5t^2$ m/s in den ersten 6 Sekunden.

Strecke: $\int_0^6 0{,}5t^2\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^6=36$ m. Durchschnitt: $\frac{36}{6}=6$ m/s. Am Ende erreicht er $v(6)=18$ m/s, also deutlich mehr als im Mittel.

Wusstest du?

Das Integralzeichen $\int$ ist ein langgezogenes S für „Summe“ und stammt von Gottfried Wilhelm Leibniz. Schon der griechische Gelehrte Archimedes berechnete vor mehr als 2000 Jahren Flächen unter Parabeln, indem er sie mit immer mehr Dreiecken ausschöpfte. Der Zusammenhang zwischen Ableiten und Integrieren wird als Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung bezeichnet.

Häufige Fehler

- Beim Aufleiten die Potenz nicht um 1 erhöhen oder nicht durch den neuen Exponenten teilen.
- Beim Einsetzen der Grenzen $F(a) - F(b)$ statt $F(b) - F(a)$ rechnen.
- Flächen unterhalb der x-Achse ohne Betrag als positiven Flächeninhalt angeben.
- Die Probe durch Ableiten weglassen.
- Bei Sachaufgaben die Einheit vergessen (Fläche = Bestandsänderung in Einheit mal Einheit).

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Stammfunktion F von f: $F' = f$; mit F ist auch $F + C$ eine Stammfunktion.
- Potenzregel für Stammfunktionen: $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$.
- Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$; die Konstante C entfällt.
- Das Integral ist ein orientierter Flächeninhalt: Teile unter der x-Achse zählen negativ.
- Flächeninhalt bis zur x-Achse: an den Nullstellen aufteilen, Beträge addieren.
- Bestand rekonstruieren: $B(b) = B(a) + \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$.
- Mittelwert einer Funktion: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.
- Probe bei Stammfunktionen: Ableiten der Stammfunktion muss wieder die Ausgangsfunktion ergeben.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Skizziere die Funktion immer, bevor du ein Integral berechnest. Dann siehst du, ob die Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt und ob das Intervall an Nullstellen geteilt werden muss. Vergleiche dein Ergebnis mit einer groben Schätzung durch Rechtecke: Es muss zwischen Untersumme und Obersumme liegen.

Zusammenfassung

Die Integralrechnung rekonstruiert Bestände aus Änderungsraten und berechnet Flächeninhalte. Zentrale Idee: Stammfunktion F mit $F' = f$ und $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Mit Unter- und Obersumme kannst du Ergebnisse abschätzen und kontrollieren. In den nächsten Jahren der Oberstufe baust du darauf Flächen zwischen zwei Kurven, Volumina und Mittelwerte auf.

Mittelwert einer Funktion

Der Mittelwert einer Funktion f über dem Intervall $[a;b]$ ist $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$. Er gibt die Höhe eines Rechtecks über $[a;b]$ an, das denselben Flächeninhalt hat wie die Fläche unter dem Graphen. Für $f(x) = x^2$ auf $[0;3]$ ist $\int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x = 9$, der Mittelwert ist $\frac{9}{3} = 3$. Bei einer Zuflussrate ist das die durchschnittliche Rate im Zeitraum.