Arbeitsblatt - Einführung in die Integralrechnung

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Stammfunktionen bestimmen

Gib jeweils eine Stammfunktion an. Mache bei a) und b) die Probe durch Ableiten.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = 4x^3$
c) $f(x) = 6x$
d) $f(x) = 5$
e) $f(x) = x^4 - x^2$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Summen integrieren

Bestimme die Stammfunktionen. Wende die Potenzregel auf jeden Summanden an. Brüche und Wurzeln schreibst du zuerst als Potenzen.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$
b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + x$
c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$
d) $k(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Stammfunktion mit Bedingung

Bestimme die Stammfunktion F von f, deren Graph durch den angegebenen Punkt geht.

a) $f(x) = 2x$, $F(1) = 3$
b) $f(x) = 3x^2 - 2$, $F(2) = 5$
c) $f(x) = x + 1$, $F(0) = -4$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Bestimmte Integrale

Berechne die Integrale und gib an, welche Stammfunktion du verwendest.

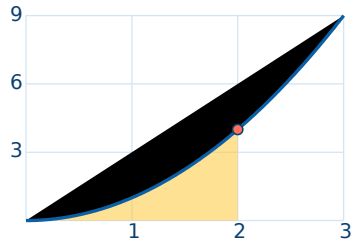
a) $\int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x$

b) $\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$
c) $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$
d) $\int_0^2 (x^3-x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Untersumme und Obersumme

Die Fläche unter dem Graphen von $f(x)=x^2$ über $[0;2]$ soll mit vier Rechtecken der Breite $0{,}5$ abgeschätzt werden.

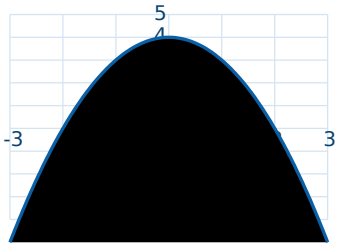


a) Berechne die Funktionswerte an den Stellen 0; $0{,}5$; 1; $1{,}5$; 2.
b) Berechne die Untersumme (Rechteckhöhen am linken Rand).
c) Berechne die Obersumme (Rechteckhöhen am rechten Rand).
d) Vergleiche mit dem exakten Wert $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Fläche unter einer Parabel

Der Graph von $f(x)=-x^2+4$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.



a) Bestimme die Nullstellen.
b) Gib eine Stammfunktion an.
c) Berechne den Flächeninhalt.
d) Ein Fensterrahmen hat genau diese Form (Einheit 1 dm). Wie groß ist die Glasfläche in dm^2?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Fläche mit Vorzeichenwechsel

Gegeben ist $f(x) = x^2 - 4$. Berechne den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse im Intervall $[0; 3]$.

a) Bestimme die Nullstelle in $[0; 3]$.
b) Berechne $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
c) Gib den Flächeninhalt an.
d) Was ergäbe $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ und warum ist das kein Flächeninhalt?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Regenwasser im Fass

Während eines Regenschauers fließt Wasser vom Dach in eine Regentonne. Die Zuflussrate beträgt in den ersten 10 Minuten $r(t) = 0{,}5t$ Liter pro Minute. Die Tonne enthält anfangs 30 Liter.

a) Wie groß ist die Zuflussrate nach 4 Minuten und nach 10 Minuten?
b) Berechne die zugeflossene Wassermenge in den ersten 10 Minuten.
c) Wie viel Wasser ist danach in der Tonne?
d) Die Tonne fasst 80 Liter. Läuft sie nach 10 Minuten über?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Geschwindigkeit und Weg

Eine Straßenbahn fährt an der Haltestelle an. Ihre Geschwindigkeit beträgt in den ersten 10 Sekunden $v(t) = 0{,}6t^2$ m/s.

a) Welche Geschwindigkeit hat die Bahn nach 5 s und nach 10 s (in km/h)?
b) Berechne den Weg in den ersten 10 Sekunden.
c) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum.
d) Warum ist die Durchschnittsgeschwindigkeit kleiner als die Endgeschwindigkeit?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Stromverbrauch einer Schule

Die elektrische Leistung der Schule über den Tag (in Kilowatt) wird durch $P(t) = 12t - t^2$ beschrieben, t in Stunden nach Unterrichtsbeginn ($0 \le t \le 12$).

a) Wann ist die Leistung am höchsten und wie hoch?
b) Berechne die verbrauchte Energie in Kilowattstunden (Integral der Leistung).
c) Berechne die durchschnittliche Leistung.
d) Die Kilowattstunde kostet *0{,}30\,€*. Was kostet der Strom an diesem Tag?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Kostenfunktion aus Grenzkosten

Die Grenzkosten eines Bäckers sind $K'(x) = 0{,}1x + 2$ (Euro je Brot), die Fixkosten

betragen 60 Euro.

a) Bestimme die Kostenfunktion K mit $K(0) = 60$.
b) Berechne die Gesamtkosten für 100 Brote.
c) Berechne die zusätzlichen Kosten für die Brote Nr. 101 bis 120 mit einem Integral.
d) Wie hoch sind die durchschnittlichen Kosten je Brot bei 100 Broten?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Mittelwert einer Temperatur

Die Temperatur im Gewächshaus folgt zwischen 6 und 18 Uhr der Funktion $T(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 6t - 20$ (t Uhrzeit in Stunden).

a) Berechne $\int_6^{18} T(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Bestimme die Durchschnittstemperatur zwischen 6 und 18 Uhr.
c) Zu welchen Zeiten liegt die Temperatur über dem Mittelwert? Löse $T(t) = \bar{T}$ näherungsweise.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Besucherstrom im Freibad

Die Ankunftsrate der Besucher im Freibad (Personen pro Stunde) ist an einem Sommertag $a(t) = 12t - t^2$ für $0 \le t \le 12$ (t in Stunden nach Öffnung). Außerdem gibt die Tabelle die gemessene Rate in Abständen von zwei Stunden an.

Zeit t in h	0	2	4	6
Rate $a(t)$	0	20	32	36

a) Prüfe die Tabellenwerte durch Einsetzen.
b) Wie viele Besucher kommen insgesamt in den ersten 6 Stunden?
c) Wie viele kommen in den gesamten 12 Stunden?
d) Wann kommen die meisten Besucher pro Stunde? Wie viele Personen sind das?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Zu- und Abfluss eines Beckens

Ein Schwimmbecken wird gefüllt und gleichzeitig durch den Überlauf entleert. Der Zufluss beträgt $z(t) = 8 - 0{,}5t$ Kubikmeter pro Stunde, der Abfluss $a(t) = 2$ Kubikmeter pro Stunde ($0 \le t \le 8$). Im Becken befinden sich anfangs 40 Kubikmeter.

a) Bestimme die Änderungsrate des Bestands $f(t) = z(t) - a(t)$.
b) Berechne die Änderung des Wasservolumens in den ersten 8 Stunden.
c) Wie viel Wasser ist nach 8 Stunden im Becken?
d) Wann ist die Änderungsrate Null? Was bedeutet das für den Bestand?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Näherung mit der Trapezregel

Die Zuflussrate eines Regenrückhaltebeckens wurde alle 2 Minuten gemessen:

Zeit t in min	0	2	4	6	8
Zufluss in l/min	0	6	10	12	10

a) Schätze die zugeflossene Menge mit Rechtecken der Breite 2 (Mittelwert aus linkem und rechtem Rand je Intervall, also Trapeze).
b) Wie groß ist die geschätzte Gesamtmenge in Litern?
c) Schätze die mittlere Zuflussrate.
d) Wann war der Zufluss am stärksten?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Der Flussquerschnitt

Der Querschnitt eines Flusses wird durch die Tiefe $d(x) = \frac{1}{5}x(10 - x)$ Meter beschrieben (x Abstand vom linken Ufer, $0 \le x \le 10$). Die Fließgeschwindigkeit beträgt im Mittel $0{,}8$ m/s.

a) Wie tief ist der Fluss in der Mitte?
b) Berechne die Querschnittsfläche $A = \int_0^{10} d(x)\,\mathrm{d}x$.
c) Wie viele Kubikmeter Wasser fließen pro Sekunde durch den Querschnitt?
d) Wie viele Kubikmeter fließen pro Stunde?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Der Hauptsatz an einem Beispiel

Betrachte $A(x) = \int_0^x t\,\mathrm{d}t$ als Funktion der oberen Grenze.

a) Berechne $A(x)$ allgemein.
b) Berechne $A(2)$ und $A(4)$.
c) Leite $A(x)$ ab. Was fällt auf?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Knobelaufgabe: Die obere Grenze gesucht

Bestimme die Zahl $a > 0$ so, dass das Integral den angegebenen Wert hat.

a) $\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x = 9$
b) $\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = 9$
c) $\int_1^a (2x - 1)\,\mathrm{d}x = 6$

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Fläche zwischen zwei Graphen

Die Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x$ schneiden sich bei $x = 0$ und $x = 2$. Zwischen den Schnittstellen liegt g oberhalb von f.

a) Berechne die Flächen unter beiden Graphen über $[0; 2]$.
b) Bestimme den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche.
c) Zeige, dass dasselbe Ergebnis aus $\int_0^2 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ folgt.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Archimedes

Archimedes zeigte, dass eine Parabelfläche genau $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Rechtecks ausmacht. Prüfe das für $f(x) = -x^2 + 4$ mit der Nullstellenbreite 4 und der Höhe 4.

a) Berechne den Flächeninhalt des umschriebenen Rechtecks.
b) Berechne den Parabelflächeninhalt aus der Aufgabe oben.
c) Bilde den Anteil und vergleiche mit $\frac{2}{3}$.