Lösungen - Einführung in die Integralrechnung

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) Potenzregel rückwärts: Exponent um 1 erhöhen und durch den neuen Exponenten teilen. $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Probe: $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$.

b) $F(x) = 4 \cdot \frac{x^4}{4} = x^4$. Probe: $F'(x) = 4x^3$.

c) $F(x) = 6 \cdot \frac{x^2}{2} = 3x^2$, denn $(3x^2)' = 6x$.

d) Eine Konstante wird zu einem linearen Term: $F(x) = 5x$, denn $(5x)' = 5$.

e) Summandenweise: $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$. Jede weitere Stammfunktion entsteht durch Addition einer Konstanten C.

Merke: Beim Integrieren wird der Exponent um eins erhöht und durch den neuen Exponenten geteilt. Die Probe durch Ableiten muss immer wieder die Ausgangsfunktion liefern.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x$, also $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$. Probe: $F'(x) = 3x^2 - 4x + 5$.

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$, also $G(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2}$.

c) Umschreiben $h(x) = x^{-2}$. Exponent $-2 + 1 = -1$: $H(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$. Probe: $H'(x) = x^{-2}$.

d) Umschreiben $k(x) = x^{1/2}$. Exponent $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$: $K(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Probe: $K'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Merke: Brüche wie $\frac{1}{x^2}$ und Wurzeln wie $\sqrt{x}$ werden immer zuerst als Potenzen geschrieben, sonst lässt sich die Potenzregel nicht anwenden. Die Regel gilt für jeden Exponenten außer -1.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Alle Stammfunktionen: $F(x) = x^2 + C$. Bedingung: $F(1) = 1 + C = 3 \Rightarrow C = 2$. Also $F(x) = x^2 + 2$. Probe: $F(1) = 3$.

b) $F(x) = x^3 - 2x + C$. $F(2) = 8 - 4 + C = 5 \Rightarrow C = 1$. Also $F(x) = x^3 - 2x + 1$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$. $F(0) = C = -4$. Also $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

Die Bedingung legt die Konstante C fest und wählt aus der Schar der parallel verschobenen Stammfunktionen genau eine aus.

Antwort: Die gesuchten Stammfunktionen sind $F(x) = x^2 + 2$, $F(x) = x^3 - 2x + 1$ und $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Jede Probe durch Einsetzen des Punktes bestätigt das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Hauptsatz: $F(2) - F(0) = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.
b) $F(x) = x^2 + x$. $F(3) - F(1) = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$.
c) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$. $F(1) - F(-1) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$. Wegen der Symmetrie ist das doppelt so viel wie $\int_0^1$.
d) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$. $F(2) - F(0) = (4 - 2) - 0 = 2$. Achtung: Auf $[0;1]$ liegt der Graph unter der x-Achse, das Integral ist dort negativ.
Merke: Beim bestimmten Integral spielt die Konstante C keine Rolle, denn sie hebt sich in der Differenz $F(b) - F(a)$ immer auf. Man wählt daher meist $C = 0$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $f(0) = 0$, $f(0{,}5) = 0{,}25$, $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 2{,}25$, $f(2) = 4$.
b) Linke Randwerte, da f steigt, sind das die kleinsten Höhen:
$U = 0{,}5 \cdot (0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25) = 0{,}5 \cdot 3{,}5 = 1{,}75$.
c) Rechte Randwerte: $O = 0{,}5 \cdot (0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 0{,}5 \cdot 7{,}5 = 3{,}75$.
d) Exakt: $\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \approx 2{,}667$. Es gilt $1{,}75$. Mit schmaleren Rechtecken rücken Unter- und Obersumme immer näher an den exakten Wert.
Die Differenz von Ober- und Untersumme beträgt hier 2. Bei acht Rechtecken der Breite $0{,}25$ würde sie auf 1 schrumpfen; im Grenzfall fallen beide Summen mit dem Integral zusammen.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Die Fläche liegt zwischen -2 und 2.
b) $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x$. Probe: $F'(x) = -x^2 + 4$.
c) $F(2) = -\frac{8}{3} + 8 = \frac{16}{3}$, $F(-2) = \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3}$. Fläche $= F(2) - F(-2) = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ Flächeneinheiten. Da der Graph über der Achse liegt, ist das Integral positiv.
d) Mit 1 LE $= 1$ dm ist 1 FE $= 1\,\mathrm{dm}^2$. Die Glasfläche beträgt etwa $10{,}67\,\mathrm{dm}^2$.
Antwort: Die Parabel schließt mit der x-Achse eine Fläche von $\frac{32}{3}$ Flächeneinheiten ein; das Fenster hat also gut zehn Quadratdezimeter Glas.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Im Intervall $[0;3]$ liegt nur $x = 2$.
b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$. $\int_0^2 f = F(2) - F(0) = \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3}$.
$\int_2^3 f = F(3) - F(2) = (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = -3 + \frac{16}{3} = \frac{7}{3}$.
c) Flächen sind positiv, deshalb nimmt man Beträge: $\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3} \approx 7{,}67$ FE.
d) $\int_0^3 f = -\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = -3$. Die Fläche unter der Achse zählt negativ und hebt die positive Fläche teilweise auf. Darum muss man an Nullstellen aufteilen.
Merke: Vor dem Berechnen eines Flächeninhalts sucht man immer zuerst die Nullstellen im Intervall, integriert stückweise und addiert die Beträge der Teilintegrale.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $r(4) = 0{,}5 \cdot 4 = 2$ Liter pro Minute, $r(10) = 5$ Liter pro Minute. Der Zufluss wird immer stärker.
b) Die Menge ist das Integral der Rate: $\int_0^{10} 0{,}5t \,\mathrm{d}t = [0{,}25t^2]_0^{10} = 25$ Liter.
c) Anfangsbestand plus Zufluss: $30 + 25 = 55$ Liter.
d) 55. Die Tonne läuft nicht über, es ist noch Platz für 25 Liter.
Merke: Das Integral einer Änderungsrate liefert die Gesamtänderung des Bestands. Den neuen Bestand erhält man, indem man diese Änderung zum Anfangsbestand addiert.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $v(5) = 0{,}6 \cdot 25 = 15$ m/s $= 54$ km/h und $v(10) = 60$ m/s $= 216$ km/h. Der zweite Wert ist für eine Straßenbahn unrealistisch; das Modell gilt nur für die ersten Sekunden.
b) Der Weg ist das Integral der Geschwindigkeit: $\int_0^{10} 0{,}6t^2 \,\mathrm{d}t = [0{,}2t^3]_0^{10} = 200$ m.
c) $\bar{v} = \frac{200\text{ m}}{10\text{ s}} = 20$ m/s $= 72$ km/h.
d) Die Bahn wird ständig schneller. Fast die ganze Zeit fährt sie langsamer als am Ende, deshalb liegt der Mittelwert deutlich unter 60 m/s.
Antwort: In den ersten zehn Sekunden legt die Bahn 200 Meter zurück, im Mittel mit 20 Metern pro Sekunde.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $P'(t) = 12 - 2t = 0 \Rightarrow t = 6$. $P(6) = 72 - 36 = 36$ kW. Sechs Stunden nach Unterrichtsbeginn ist die Leistung am höchsten.
b) Energie $= \int$ Leistung: $\int_0^{12} (12t - t^2)\,\mathrm{d}t = \left[6t^2 - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^{12} = 864 - 576 = 288$ kWh.
c) $\bar{P} = \frac{288\text{ kWh}}{12\text{ h}} = 24$ kW.
d) *288\cdot0{,}30\,€=86{,}40\,€* Stromkosten an diesem Tag.
Antwort: Die Schule verbraucht an diesem Tag 288 Kilowattstunden, im Mittel 24 Kilowatt, und bezahlt dafür $86{,}40$ Euro. Die Energie entspricht der Fläche unter der Leistungskurve.

Lösung zu Aufgabe 11

a) K ist eine Stammfunktion der Grenzkosten: $K(x) = 0{,}05x^2 + 2x + C$. Aus $K(0) = C = 60$ folgt $K(x) = 0{,}05x^2 + 2x + 60$.
b) *K(100)=0{,}05\cdot10\,000+200+60=500+200+60=760\,€*.
c) Zusatzkosten *=\int_{100}^{120}K'(x)\,\mathrm{d}x=[0{,}05x^2+2x]_{100}^{120}=(720+240)-(500+200)=260\,€*. Kontrolle: $K(120) - K(100) = 1020 - 760 = 260$.
d) Stückkosten: *\frac{760}{100}=7{,}60\,€* je Brot.
Merke: Die Grenzkosten sind die Ableitung der Kostenfunktion. Umgekehrt erhält man die Kostenfunktion als Stammfunktion der Grenzkosten; die Integrationskonstante entspricht genau den Fixkosten. Das Integral der Grenzkosten über ein Intervall liefert

die zusätzlichen Kosten.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Stammfunktion $F(t) = -\frac{1}{12}t^3 + 3t^2 - 20t$. $F(18) = -486 + 972 - 360 = 126$, $F(6) = -18 + 108 - 120 = -30$. Also $\int_6^{18} T\,\mathrm{d}t = 126 - (-30) = 156$.

b) Mittelwert $= \frac{1}{18-6}\int_6^{18} T\,\mathrm{d}t = \frac{156}{12} = 13$ °C.

c) $-\frac{1}{4}t^2 + 6t - 20 = 13 \Leftrightarrow t^2 - 24t + 132 = 0 \Rightarrow t = 12 \pm 2\sqrt{3}$, also $t \approx 8{,}5$ und $t \approx 15{,}5$. Etwa von 8:30 bis 15:30 Uhr liegt die Temperatur über 13 °C. Die Stellen liegen symmetrisch zum Scheitel bei 12 Uhr.

Merke: Der Mittelwert einer Funktion auf $[a;b]$ ist $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Er entspricht der Höhe eines Rechtecks mit derselben Fläche.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $a(2) = 24 - 4 = 20$, $a(4) = 48 - 16 = 32$, $a(6) = 72 - 36 = 36$. Alle Tabellenwerte stimmen.

b) Die Anzahl ist das Integral der Rate: $\int_0^6 (12t - t^2)\,\mathrm{d}t = \left[6t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^6 = 216 - 72 = 144$ Besucher.

c) $\int_0^{12}(12t - t^2)\,\mathrm{d}t = 864 - 576 = 288$ Besucher. Wegen der Symmetrie kommen in der zweiten Hälfte ebenfalls 144.

d) $a'(t) = 12 - 2t = 0 \Rightarrow t = 6$. Sechs Stunden nach Öffnung kommen mit 36 Personen pro Stunde die meisten Besucher.

Antwort: In den ersten sechs Stunden kommen 144 Besucher, am ganzen Tag 288. Die Ankunftsrate ist mittags am größten.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Bestandsänderung = Zufluss minus Abfluss: $f(t) = 8 - 0{,}5t - 2 = 6 - 0{,}5t$ m³ pro Stunde.

b) $\int_0^8 (6 - 0{,}5t)\,\mathrm{d}t = [6t - 0{,}25t^2]_0^8 = 48 - 16 = 32$ m³.

c) Anfangsbestand plus Änderung: $40 + 32 = 72$ m³.

d) $6 - 0{,}5t = 0 \Rightarrow t = 12$. Das liegt außerhalb des Zeitraums. Bis $t = 8$ ist $f(t) > 0$, der Bestand wächst also ständig, nur immer langsamer.

Antwort: Nach acht Stunden befinden sich 72 Kubikmeter im Becken. Das Integral der Differenz von Zufluss und Abfluss liefert die Bestandsänderung.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Jedes Trapez hat die Breite 2: $\frac{0+6}{2}\cdot 2 = 6$; $\frac{6+10}{2}\cdot 2 = 16$; $\frac{10+12}{2}\cdot 2 = 22$; $\frac{12+10}{2}\cdot 2 = 22$ (jeweils Liter).

b) Summe: $6 + 16 + 22 + 22 = 66$ Liter in 8 Minuten.

c) $\frac{66}{8} = 8{,}25$ Liter pro Minute.

d) Der größte Messwert ist 12 l/min bei $t = 6$. Zwischen den Messungen könnte der

echte Höchstwert etwas anders liegen.
Merke: Die Trapezregel ersetzt die Kurve zwischen zwei Messpunkten durch eine Strecke. Je kürzer die Messabstände, desto genauer wird die Schätzung.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Die Mitte liegt bei $x = 5$: $d(5) = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot 5 = 5$ m.
b) $d(x) = 2x - \frac{1}{5}x^2$. $A = \left[x^2 - \frac{1}{15}x^3\right]_0^{10} = 100 - \frac{1000}{15} = \frac{100}{3} \approx 33{,}3\,\mathrm{m}^2$.
c) Durchfluss = Fläche · Geschwindigkeit: $\frac{100}{3} \cdot 0{,}8 \approx 26{,}7\,\mathrm{m}^3$ pro Sekunde.
d) Eine Stunde hat 3600 s: $\frac{80}{3} \cdot 3600 = 96\,000\,\mathrm{m}^3$ pro Stunde.
Antwort: Die Querschnittsfläche beträgt etwa $33{,}3$ Quadratmeter. Durch den Fluss strömen pro Sekunde etwa $26{,}7$ Kubikmeter und pro Stunde rund $96\,000$ Kubikmeter Wasser.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Stammfunktion $\frac{1}{2}t^2$: $A(x) = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 - 0 = \frac{1}{2}x^2$.
b) $A(2) = 2$ und $A(4) = 8$. Geometrisch sind das rechtwinklige Dreiecke mit Grundseite und Höhe x: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ und $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.
c) $A'(x) = x$. Die Ableitung der Integralfunktion ist wieder die Integrandenfunktion $f(t) = t$. Das ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
Antwort: Die Flächenfunktion $A(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion von $f(t) = t$. Genau dieser Zusammenhang erlaubt es, Flächen mit Stammfunktionen zu berechnen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]_0^a = a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, denn $a > 0$.
b) $\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3 = 9 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$.
c) $[x^2 - x]_1^a = (a^2 - a) - (1 - 1) = a^2 - a = 6$. Also $a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) = 0$. Wegen $a > 0$ ist $a = 3$; die Lösung -2 entfällt. Probe: $9 - 3 = 6$.
Merke: Bei solchen Aufgaben berechnet man zuerst das Integral allgemein mit der Variablen a als Grenze und löst danach die entstehende Gleichung. Lösungen, die die Bedingung $a > 0$ verletzen, werden verworfen. In allen drei Fällen ist $a = 3$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]_0^2 = 4$ und $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.
b) Die eingeschlossene Fläche ist die Fläche unter dem oberen Graphen minus die unter dem unteren: $4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$ FE.
c) $\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$. Man kann also direkt die Differenzfunktion integrieren.
Merke: Die Fläche zwischen zwei Graphen berechnet man als Integral von „oberer minus unterer Funktion“ zwischen den Schnittstellen. Liegen die Graphen abwechselnd oben, muss man an den Schnittstellen aufteilen.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Das Rechteck reicht von $x = -2$ bis $x = 2$ (Breite 4) und hat die Scheitelhöhe 4: $4 \cdot 4 = 16$ FE.

b) Aus Aufgabe 6: $\int_{-2}^{2}(-x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ FE.

c) $\frac{32/3}{16} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$. Die Parabelfläche ist genau $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Rechtecks; Archimedes hatte recht.

Merke: Dieses Ergebnis gilt für jede Parabel: Die Fläche zwischen Parabelbogen und Sehne ist immer zwei Drittel des umschriebenen Rechtecks.