Lösungen zur Klassenarbeit - Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

In der Urne sind 10 Kugeln; nach dem ersten Zug ohne Zurücklegen nur noch 9.
a) Pfad grün-grün: erst $\frac{6}{10}$, dann sind noch 5 grüne unter 9 Kugeln, also $\frac{5}{9}$. Pfadregel: $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ (1 P. Ansatz, 1 P. Ergebnis).
b) „Genau eine gelbe“ tritt auf zwei Pfaden ein. Grün-gelb: $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$; gelb-grün: $\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$. Summenregel: $\frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$ (1 P. Ansatz, 1 P. Ergebnis). Kontrolle: $P(\text{gelb-gelb}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$, und $\frac{30+48+12}{90} = 1$. Antwort: $P(gg) = \frac{1}{3}$, $P(\text{genau eine gelbe}) = \frac{8}{15}$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Vierfeldertafel (Mädchen M, Jungen ; Instrument I): Mädchen 60 mit, 60 ohne, zusammen 120. Jungen insgesamt $200 - 120 = 80$, davon mit Instrument $80 - 60 = 20$, ohne 60. Spaltensummen: 80 mit, 120 ohne, gesamt 200 (1 P.).
b) Bedingung „Junge“: Grundmenge sind die 80 Jungen, 20 spielen ein Instrument. $\frac{20}{80} = 0{,}25$ (1 P.).
c) Test auf Unabhängigkeit: $P(M) = \frac{120}{200} = 0{,}6$, $P(I) = \frac{80}{200} = 0{,}4$, Produkt $0{,}24$. Tatsächlich ist $P(M \cap I) = \frac{60}{200} = 0{,}30 \neq 0{,}24$ (1 P.). Die Merkmale sind abhängig. Inhaltlich: Unter den Mädchen spielen $50\,\%$ ein Instrument, unter den Jungen nur $25\,\%$ (1 P.).

Lösung zu Aufgabe 3 (3 BE/Punkte)

a) Der Additionssatz lautet $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Die Schnittwahrscheinlichkeit wird abgezogen, weil sie in $P(A)$ und in $P(B)$ enthalten ist und sonst doppelt gezählt würde. Umgestellt: $P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}65 = 0{,}15$ (2 P.).
b) A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Produkt: $0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$, das stimmt mit dem Ergebnis aus a) überein, also sind die Ereignisse unabhängig (1 P.). Gleichwertige Prüfung: $P_B(A) = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5 = P(A)$; das Eintreten von B ändert die Wahrscheinlichkeit von A nicht. Antwort: $P(A \cap B) = 0{,}15$, A und B sind unabhängig.

Lösung zu Aufgabe 4 (6 BE/Punkte)

a) Erste Stufe: infiziert $0{,}04$, nicht infiziert $0{,}96$. Zweite Stufe nach „infiziert“: positiv $0{,}9$ (Sensitivität), negativ $0{,}1$. Nach „nicht infiziert“: positiv $0{,}05$ (Fehlalarm), negativ $0{,}95$ (1 P.).

b) Totale Wahrscheinlichkeit über beide Pfade zu „positiv“:
$0{,}04 \cdot 0{,}9 + 0{,}96 \cdot 0{,}05 = 0{,}036 + 0{,}048 = 0{,}084$ (2 P.).
c) Satz von Bayes: $P_{\text{pos}}(\text{inf}) = \frac{0{,}036}{0{,}084} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$ (2 P.). Nur etwa $43\,\%$ der positiv Getesteten sind wirklich infiziert, weil die Infektion selten ist und die vielen Gesunden mehr falsch-positive Ergebnisse ($0{,}048$) liefern als die wenigen Kranken richtig-positive.
d) Erwartungswert: $2500 \cdot 0{,}036 = 90$ Personen (1 P.). Zum Vergleich wären $2500 \cdot 0{,}048 = 120$ Personen falsch positiv.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Eine zufällig gewählte Schraube stammt mit $0{,}7$ aus Werk 1 und mit $0{,}3$ aus Werk 2. Der Ausschussanteil der Gesamtlieferung ergibt sich mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit als gewichtetes Mittel:
$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}06 = 0{,}014 + 0{,}018 = 0{,}032$, also $3{,}2\,\%$ (2 P.).
b) Gesucht ist die umgekehrte bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(W_2)$. Nach Bayes: $\frac{P(W_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}018}{0{,}032} = 0{,}5625$ (1 P.). Obwohl Werk 2 nur $30\,\%$ liefert, stammt mehr als die Hälfte des Ausschusses von dort, weil seine Fehlerquote dreimal so hoch ist. Antwort: $3{,}2\,\%$ Ausschuss insgesamt; eine fehlerhafte Schraube kommt mit $56{,}25\,\%$ aus Werk 2.