Lernzettel - Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Zieht man mit Vorwissen anders?

In einer Klasse tragen $60\,\%$ der Schüler eine Brille. Unter den Mädchen sind es aber $75\,\%$. Wenn du schon weißt, dass jemand ein Mädchen ist, ändert sich also die Wahrscheinlichkeit für eine Brille. Genau das beschreibt die **bedingte Wahrscheinlichkeit**. Sie ist das Werkzeug, mit dem Ärzte Testergebnisse deuten, Versicherungen Risiken bewerten und Spamfilter entscheiden, welche E-Mail aussortiert wird. Außerdem klärst du in diesem Kapitel, wann zwei Ereignisse sich nicht beeinflussen, also **stochastisch unabhängig** sind.

Mehrstufige Zufallsexperimente

Viele Zufallsexperimente bestehen aus mehreren Schritten, zum Beispiel zweimal Ziehen aus einer Urne oder dreimal Werfen einer Münze. Du stellst sie in einem **Baumdiagramm** dar. Jeder Pfad ist ein Ergebnis. Es gelten die Pfadregeln:

- **Produktregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.
- **Summenregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade.

Beispiel 1 (ohne Zurücklegen). Eine Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Dann ist $P(rr) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$, $P(rb) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$, $P(br) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$ und $P(bb) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$. Die Summe ist 1. Die Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln ist $\frac{5}{14} + \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Oft kennst du schon etwas über den Ausgang. Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Bedingung A ist

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (P(A) > 0).$$

Sie gibt an, wie wahrscheinlich B ist, wenn man weiß, dass A eingetreten ist. Umgestellt ergibt sich die Produktregel $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$. Im Baumdiagramm stehen die bedingten Wahrscheinlichkeiten an den zweiten Ästen.

Beispiel 2. Würfel mit A: „gerade Zahl“ und B: „größer als 3“. Es gilt $P(A) = \frac{1}{2}$, $A \cap B = \{4; 6\}$, also $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Dann $P_A(B) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$.

Vierfeldertafel

Die Vierfeldertafel ordnet die Wahrscheinlichkeiten von A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$ und ihren Schnitten in einer Tabelle. Aus drei Angaben lassen sich alle anderen Werte ergänzen, weil Zeilen- und Spaltensummen stimmen müssen.

Beispiel 3. Gegeben: $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}3$.

	B	$\bar{B}$	**Summe**
A	0,3	0,3	0,6
$\bar{A}$	0,1	0,3	0,4
Summe	0,4	0,6	1

Daraus: $P_A(B) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$ und $P_B(A) = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$.

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Gleichwertig: $P_A(B) = P(B)$, das Wissen über A ändert die Wahrscheinlichkeit von B nicht. Im Beispiel 3 gilt $0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24 \neq 0{,}3$: Die Ereignisse sind abhängig. Beim Würfel sind $A = \{1; 2\}$ und $B =$„gerade“ unabhängig, denn $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Sind A und B unabhängig, dann auch A und $\bar{B}$, denn $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\,P(\bar{B})$. Ziehen mit Zurücklegen liefert unabhängige Stufen.

Umkehrung der Bedingung

Manchmal ist $P_A(B)$ bekannt, gesucht ist aber $P_B(A)$. Dann hilft die Vierfeldertafel oder das umgekehrte Baumdiagramm. Man berechnet zuerst $P(A \cap B)$ und $P(B)$ und dividiert.

Beispiel 4 (medizinischer Test). Eine Krankheit betrifft 2 % der Bevölkerung. Der Test erkennt Kranke zu 95 % und Gesunde fehlerfrei zu 90 %. Es gilt $P(\text{positiv}) = 0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$. Die Wahrscheinlichkeit, bei positivem Test wirklich krank zu sein, beträgt $\frac{0{,}019}{0{,}117} \approx 0{,}162$, also nur etwa 16 %. Das überrascht viele, weil Gesunde so viel häufiger sind. Anschaulich: Bei 10 000 Personen sind 190 richtig positiv und 980 falsch positiv.

Baumdiagramm oder Vierfeldertafel?

Beide Darstellungen enthalten dieselbe Information, eignen sich aber für unterschiedliche Situationen. Das Baumdiagramm passt zu zeitlich geordneten Vorgängen mit mehreren Stufen, etwa zwei Ziehungen nacheinander oder einem Test nach einer Krankheit. Die Vierfeldertafel ist bei zwei Merkmalen praktisch, etwa Geschlecht und Rauchen. Zum Umkehren einer Bedingung ist sie besonders übersichtlich, weil alle Schnittwahrscheinlichkeiten in den Feldern stehen. Wähle die Darstellung, die zur Aufgabe passt, und wechsle ruhig zwischen beiden, wenn es hilft.

Ein Tipp für Aufgaben mit absoluten Zahlen: Stelle dir eine Gruppe von 1000 oder 10 000 Personen vor und rechne mit ganzen Zahlen. Dadurch werden bedingte

Wahrscheinlichkeiten anschaulich, und typische Denkfehler wie die Verwechslung von $P_A(B)$ mit $P_B(A)$ fallen sofort auf.

Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist (mit $P(B) > 0$), ist $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Man liest: „Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B“. Das Ereignis B bildet die neue Grundmenge, $P_B(A)$ ist der Anteil von A in B.

Satz: Pfadregeln

Produktregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades im Baumdiagramm ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, also $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.
Summenregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das zu mehreren Pfaden gehört, ist die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen, ergeben immer zusammen 1.

Definition: Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Gleichwertig: $P_B(A) = P(A)$. Das Eintreten von B ändert die Wahrscheinlichkeit von A nicht. Gilt die Gleichung nicht, heißen die Ereignisse **abhängig**.

So gehst du vor: Aufgaben mit Vierfeldertafel lösen

1. Lege die Tafel mit den Ereignissen A, und B, an und trage alle bekannten Wahrscheinlichkeiten oder Anzahlen ein.
2. Ergänze die fehlenden Felder durch Rechnen: Jede Zeile und jede Spalte ergibt in der Summe den Randwert.
3. Lies die gesuchte Wahrscheinlichkeit ab oder bilde den Quotienten $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
4. Schreibe einen Antwortsatz in Worten.

Beispiel 5

Eine Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Zwei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide rot sind, und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite rot ist?



Beide rot: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$. Zweite rot: Pfade rot-rot und blau-rot: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20+15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$. Überraschend: Die Wahrscheinlichkeit für die zweite Kugel ist genauso groß wie für die erste.

Beispiel 6

In einer Schule fahren $40\,\%$ mit dem Bus, $35\,\%$ mit dem Rad und $25\,\%$ gehen zu Fuß. Mit dem Bus kommen $10\,\%$ zu spät, mit dem Rad $5\,\%$, zu Fuß $2\,\%$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler zu spät kommt?

Summe der Pfade:
$0{,}40 \cdot 0{,}10 + 0{,}35 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}0175 + 0{,}005 = 0{,}0625$. Etwa $6{,}25\,\%$ aller Schüler kommen zu spät.

Satz: Umkehrung der Bedingung (Satz von Bayes)

Kennst du $P_A(B)$, suchst aber $P_B(A)$, so gilt $P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$, wobei der Nenner mit der Summenregel aus allen Pfaden zu B berechnet wird. Im Baumdiagramm liest du den Zähler am Pfad „erst A, dann B“ ab und teilst durch die Summe aller Pfade, die in B enden.

Beispiel 7

Weiter mit dem Schulweg: Ein Schüler kommt zu spät. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er mit dem Bus gefahren?



$P(\text{Bus} \mid \text{spät}) = \frac{0{,}04}{0{,}0625} = 0{,}64$. Zwar fahren nur $40\,\%$ mit dem Bus, aber unter den Zuspätkommenden sind es $64\,\%$. Der Bus ist also der häufigste Grund für Verspätungen.

Beispiel 8

Zwei Ereignisse haben $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ und $P(A \cap B) = 0{,}2$. Sind sie unabhängig?

Es gilt $P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$. Die Ereignisse sind unabhängig. Probe: $P_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5 = P(A)$.

Beispiel 9

In einem Sportverein sind $60\,\%$ der Mitglieder Kinder. Von den Kindern nehmen $80\,\%$ an einer Sommerfahrt teil, von den Erwachsenen $30\,\%$. Wie groß ist der Anteil der Kinder unter allen Teilnehmenden?

Zuerst die Teilnehmer insgesamt: $0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}48 + 0{,}12 = 0{,}60$. Der Pfad „Kind und Teilnahme“ hat die Wahrscheinlichkeit $0{,}48$. Also gilt $P_{\text{Teilnahme}}(\text{Kind}) = \frac{0{,}48}{0{,}60} = 0{,}8$. Unter den Teilnehmenden sind vier Fünftel Kinder, obwohl Kinder nur drei Fünftel der Mitglieder sind. Diese Verschiebung entsteht, weil Kinder häufiger teilnehmen. Solche Umkehrungen helfen bei der Planung: Wer die Teilnehmerzahl und ihre Zusammensetzung kennt, kann Busse und Betreuer passend bestellen.

Achtung

Verwechsle nie $P_B(A)$ und $P_A(B)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer an einem Unfall beteiligt ist, wenn er betrunken war, ist eine ganz andere Zahl als die Wahrscheinlichkeit, dass er betrunken war, wenn er in einen Unfall verwickelt ist. Ebenso sind **unabhängig** und **sich ausschließend** verschiedene Dinge: Zwei Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit, die sich ausschließen ($A \cap B = \emptyset$), sind sogar stark abhängig, denn $P_B(A) = 0 \neq P(A)$.

Hinweis: Baum oder Vierfeldertafel?

Sind mehrere Stufen nacheinander gegeben (erst Maschine, dann Defekt), nimmst du das Baumdiagramm. Sind zwei Merkmale gleichzeitig gegeben (Geschlecht und Brille), ist die Vierfeldertafel übersichtlicher. Beide Darstellungen lassen sich ineinander umrechnen, das ist der Schlüssel, um bedingte Wahrscheinlichkeiten umzukehren.

Wusstest du?

Der Satz von Bayes ist nach dem englischen Pfarrer Thomas Bayes (1701–1761) benannt, der sich in seiner Freizeit mit Wahrscheinlichkeit beschäftigte. Seine Arbeit

wurde erst nach seinem Tod veröffentlicht. Heute steckt sein Gedanke in Spamfiltern, medizinischen Tests und selbstlernenden Systemen: Neue Informationen verändern die Einschätzung einer Wahrscheinlichkeit.

Häufige Fehler

- $P_A(B)$ mit $P_B(A)$ verwechseln: Der Nenner ist immer die Bedingung.
- Bei Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe nicht anpassen.
- Unabhängigkeit mit „sich ausschließen“ verwechseln: Disjunkte Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit sind abhängig.
- In der Vierfeldertafel Spalten- und Zeilensumme nicht kontrollieren.
- Die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten nicht auf 1 prüfen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ mit $P(B) > 0$.
- Pfadregeln: entlang eines Pfades multiplizieren, mehrere Pfade zum selben Ereignis addieren; die Äste eines Knotens ergeben zusammen 1.
- Vierfeldertafel: Zeilen- und Spaltensummen liefern die Randwerte, jedes Feld ist $P(A \cap B)$ usw.
- Unabhängigkeit: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, gleichwertig $P_B(A) = P(A)$.
- Umkehren einer Bedingung mit dem Satz von Bayes: Pfad durch die Summe aller Pfade zum bekannten Ereignis teilen.
- Unabhängig ist nicht dasselbe wie unvereinbar: Ereignisse mit $A \cap B = \emptyset$ und $P(A), P(B) > 0$ sind abhängig.
- Ziehen ohne Zurücklegen: Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich von Stufe zu Stufe, mit Zurücklegen bleiben sie gleich.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Beginne jede Aufgabe mit einem Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel und beschrifte alle Äste. Schreibe die gesuchte Wahrscheinlichkeit zuerst als Formel hin, etwa $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, und setze dann die Werte ein. Mit einer Gegenkontrolle über die Summe 1 erkennst du Fehler sofort.

Zusammenfassung

Mehrstufige Experimente rechnest du mit den Pfadregeln. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ misst die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A bekannt ist. Unabhängigkeit liegt vor, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ gilt. Vierfeldertafel und Baumdiagramm helfen, die Bedingung umzukehren. Diese Werkzeuge brauchst du bei Tests, Umfragen und Qualitätskontrolle.

Weiteres Beispiel: Qualitätskontrolle

Maschine A fertigt 60 % der Teile mit 2 % Ausschuss, Maschine B fertigt 40 % mit 5 % Ausschuss. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliges Teil Ausschuss ist, beträgt $0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$. Wurde ein defektes Teil gefunden, stammt es mit $\frac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$, also zu 37,5 %, von Maschine A. Trotz des größeren Anteils an der Produktion hat A also den kleineren Anteil an den Defekten, weil ihre Fehlerquote niedriger ist.