Arbeitsblatt - Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Ziehen aus der Urne

In einer Urne liegen 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln nacheinander **ohne** Zurücklegen gezogen.



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für „rot, rot“.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für „zwei verschiedene Farben“.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für „zwei blaue Kugeln“.
d) Prüfe, dass die Wahrscheinlichkeiten aller vier Pfade zusammen 1 ergeben.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Mit und ohne Zurücklegen

Ein Beutel enthält 4 rote und 6 grüne Gummibärchen. Du ziehst zwei nacheinander.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige zu ziehen, wenn du das erste **zurücklegst**?
b) Wie groß ist sie, wenn du **nicht** zurücklegst?
c) Warum ist sie im zweiten Fall kleiner oder größer?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen

Berechne $P_B(A)$ und $P_A(B)$ für die folgenden Angaben.

a) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}2$
b) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cap B) = 0{,}12$
c) $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}1$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Vierfeldertafel vervollständigen

Zu einer Befragung von 200 Schülerinnen und Schülern einer Schule liegen folgende Angaben vor: 110 haben ein Haustier, 90 nicht. Von den Mädchen haben 28 kein Haustier, insgesamt sind 120 Befragte Mädchen.

	Haustier	kein Haustier	Summe
Mädchen	?	28	?
Junge	?	?	?
Summe	110	90	200

a) Ergänze die Vierfeldertafel.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Befragter ein Mädchen mit Haustier ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Haustier unter der Bedingung „Mädchen“?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „Mädchen“ unter der Bedingung „Haustier“?

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten

Für zwei Ereignisse A und B gelten $P(A \cap B) = 0{,}12$, $P(A) = 0{,}30$ und $P(B) = 0{,}40$.

	B		Summe
A	0,12	?	0,30
	?	?	?
Summe	0,40	?	1

a) Ergänze die Tafel.
b) Berechne $P_A(B)$ und $P_B(A)$.
c) Prüfe, ob A und B unabhängig sind.
d) Berechne $P(A \cup B)$.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Unabhängig oder nicht?

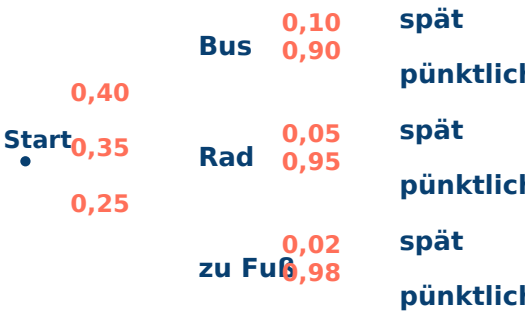
Prüfe jeweils, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

a) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}1$
b) $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}35$
c) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$
d) Beim Würfeln: A: „gerade Zahl“, B: „Zahl größer als 4“

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der Schulweg

Eine Schule hat 400 Schüler. $40\,\%$ kommen mit dem Bus, $35\,\%$ mit dem Rad, $25\,\%$ gehen zu Fuß. Mit dem Bus kommen $10\,\%$ zu spät, mit dem Rad $5\,\%$, zu Fuß $2\,\%$.



a) Zeichne die Pfade und berechne die Wahrscheinlichkeit „Bus und zu spät“.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler zu spät kommt?
c) Ein Schüler kam zu spät. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kam er mit dem Rad?
d) Wie viele der 400 Schüler sind erwartungsgemäß zu spät?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Medizintest

Eine seltene Erkrankung betrifft $2\,\%$ einer Bevölkerung. Ein Test erkennt Kranke mit $95\,\%$ Sicherheit als positiv, zeigt aber auch bei $4\,\%$ der Gesunden fälschlich positiv an.



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig getesteter Mensch positiv getestet wird.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv Getesteter wirklich krank ist.
c) Wie viele von $10\,000$ Getesteten sind „positiv“, und wie viele davon sind wirklich krank?
d) Erkläre, warum das Ergebnis überrascht.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der Spamfilter

$30\,\%$ aller E-Mails sind Spam. Der Filter markiert $98\,\%$ der Spam-Mails und fälschlich $1\,\%$ der normalen Mails.

a) Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mail markiert wird.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine markierte Mail wirklich Spam ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht markierte Mail Spam ist?
d) Von 1000 Mails: Wie viele normale Mails landen erwartungsgemäß im Spam-Ordner?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Zwei Maschinen

In einem Werk stellt Maschine 1 genau $60\,\%$ der Bauteile her, Maschine 2 die übrigen $40\,\%$. Maschine 1 liefert $3\,\%$ Ausschuss, Maschine 2 liefert $5\,\%$ Ausschuss.

a) Wie groß ist der Anteil des Ausschusses insgesamt?
b) Ein Bauteil ist Ausschuss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von Maschine 2?
c) Ein Bauteil ist kein Ausschuss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von Maschine 1?
d) Der Betrieb beschließt, Maschine 2 stillzulegen. Wie ändert sich der Ausschuss?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Wetter von heute und morgen

Die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag beträgt $30\,\%$. Regnet es heute, regnet es morgen mit $60\,\%$. Regnet es heute nicht, regnet es morgen mit $20\,\%$.

a) Zeichne ein Baumdiagramm.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet?
c) Es regnet morgen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch heute geregnet?
d) Sind „heute Regen“ und „morgen Regen“ unabhängig? Begründe.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Würfeln mit Vorwissen

Zwei faire Würfel werden geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme mindestens 10“ unter der Bedingung „erster Würfel zeigt 5“?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „erster Würfel gerade“ unter der Bedingung „Augensumme 8“?
c) Ist „Augensumme 7“ unabhängig vom Ergebnis des ersten Würfels?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Umfrage zur Nutzung sozialer Netzwerke

In einer Umfrage unter 500 Jugendlichen wurde nach dem Alter und der Nutzung sozialer Medien gefragt.

	Social-Media-Nutzer	kein Nutzer	Summe
Unter 16 Jahre	190	10	200
16 Jahre und älter	210	90	300
Summe	400	100	500

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Befragter unter 16 ist und soziale Medien nutzt.
b) Wie groß ist der Anteil der Nutzer bei den unter 16-Jährigen, wie groß bei den älteren?
c) Sind Alter und Nutzung unabhängig? Begründe mit Zahlen.
d) Wie müsste die Zahl der Nutzer unter den Älteren aussehen, damit die Merkmale unabhängig wären (Randsummen unverändert)?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Das Kartenspiel

Ein Skatblatt hat 32 Karten, darunter 4 Asse. Du ziehst zwei Karten ohne Zurücklegen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Asse?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau ein Ass?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Ass?
d) Die erste Karte war ein Ass. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite auch ein Ass ist?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Das Flughafenproblem

Bei der Sicherheitskontrolle am Flughafen schlägt ein Scanner an. Von 1000 Reisenden führt im Mittel 1 einen verbotenen Gegenstand mit. Der Scanner schlägt bei Reisenden mit verbotenem Gegenstand zu $99\,\%$ an, bei allen anderen zu $5\,\%$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Scanner anschlägt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Reisender, bei dem der Scanner anschlägt, tatsächlich einen verbotenen Gegenstand dabei hat?
c) Wie viele von $100\,000$ Reisenden lösen einen Fehlalarm aus?
d) Wie müsste die Fehlalarmquote sein, damit mehr als die Hälfte der Alarme berechtigt wäre?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Losbude auf dem Schulfest

In einer Kiste liegen 12 Lose, davon 3 Gewinne. Drei Kinder ziehen nacheinander je ein Los, ohne es zurückzulegen. Das Ergebnis wird erst am Ende bekannt gegeben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Kind gewinnt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind gewinnt? Berechne sie mit der Summenregel.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind gewinnt?
d) Sind „erstes Kind gewinnt“ und „zweites Kind gewinnt“ unabhängig?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Verein und Geschlecht

In einer Befragung von 300 Kindern im Alter von 12 Jahren gaben 180 an, Sport im Verein zu treiben.

	Sport im Verein	kein Verein	Summe
Jungen	96	54	150
Mädchen	84	66	150
Summe	180	120	300

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind im Verein ist.
b) Berechne diese Wahrscheinlichkeit getrennt für Jungen und für Mädchen.
c) Beurteile, ob das Geschlecht und die Vereinszugehörigkeit unabhängig sind.
d) Welche Zahl müsste in der Zelle „Jungen im Verein“ stehen, damit Unabhängigkeit gilt (alle Randsummen gleich)?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Knobelaufgabe: Wahrscheinlichkeiten mit Parameter

Für zwei Ereignisse gilt $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$.

a) Welchen Wert muss $P(A \cap B)$ haben, damit A und B unabhängig sind? Berechne dann $P(A \cup B)$.
b) Es sei $P(A \cap B) = 0{,}1$. Berechne $P_B(A)$ und beurteile die Abhängigkeit.
c) Zwischen welchen Werten kann $P(A \cap B)$ höchstens liegen?
d) Welcher Wert für $P(A \cap B)$ entspricht „A und B schließen sich aus“?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Zwei Gleichungen sind gleichwertig

Zeige, dass die Bedingungen $P_B(A) = P(A)$ und $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gleichwertig sind, und dass dann auch $P_A(B) = P(B)$ gilt.

a) Forme $P_B(A) = P(A)$ mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit um.
b) Folgere $P_A(B) = P(B)$.
c) Prüfe das an den Zahlen $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}1$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Geburtstage am gleichen Wochentag

Drei Kinder haben jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit an einem der sieben Wochentage Geburtstag, unabhängig voneinander.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei an verschiedenen Wochentagen Geburtstag haben?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am gleichen Wochentag Geburtstag haben?
c) Bei wie vielen Kindern ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei am gleichen Wochentag erstmals größer als $50\,\%$?