Lösungen - Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) Erster Zug rot: $\frac{5}{8}$. Danach liegen noch 4 rote von 7 Kugeln in der Urne. Pfadregel: $P(rr) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.
b) Zwei Pfade gehören dazu: $P(rb) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$ und $P(br) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$.
Summenregel: $\frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.
c) $P(bb) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$. Nach dem ersten blauen Zug sind nur noch 2 blaue übrig.
d) Alle Pfade zusammen: $\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$. Das muss so sein, denn die vier Pfade decken alle Ergebnisse ab.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Mit Zurücklegen bleiben die Wahrscheinlichkeiten in beiden Stufen gleich: $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{16+36}{100} = 0{,}52$.
b) Ohne Zurücklegen ändern sich die Anteile in der zweiten Stufe: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{12+30}{90} = \frac{7}{15} \approx 0{,}467$.
c) Ohne Zurücklegen ist die Wahrscheinlichkeit kleiner $(0{,}467)$. Wer schon eine Farbe gezogen hat, findet diese Farbe danach seltener im Beutel; die andere Farbe wird wahrscheinlicher.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Definition: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$ und $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$. Da $P_B(A) = P(A)$, sind A und B hier unabhängig.
b) $P_B(A) = \frac{0{,}12}{0{,}6} = 0{,}2$ und $P_A(B) = \frac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4$.
c) $P_B(A) = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$ und $P_A(B) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.
Achtung: $P_B(A)$ und $P_A(B)$ sind im Allgemeinen verschieden, denn man teilt durch verschiedene Wahrscheinlichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Mädchen mit Haustier: $120 - 28 = 92$. Jungen: $200 - 120 = 80$. Jungen mit Haustier: $110 - 92 = 18$, Jungen ohne Haustier: $90 - 28 = 62$. Kontrolle: $18 + 62 = 80$, alle Summen stimmen.
b) Gesucht ist ein Feld der Tafel geteilt durch die Gesamtzahl: $\frac{92}{200} = 0{,}46$.
c) Bedingung „Mädchen“: Man teilt durch die Zahl der Mädchen. $P_M(H) = \frac{92}{120} \approx 0{,}767$, also etwa $77\,\%$.
d) Bedingung „Haustier“: Man teilt durch die Zahl der Haustierbesitzer.

$P_H(M) = \frac{92}{110} \approx 0{,}836$, also etwa $84\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Zeilen und Spalten müssen sich aufsummieren: ,

, , ,

.

b) $P_A(B) = \frac{0{,}12}{0{,}30} = 0{,}4$ und $P_B(A) = \frac{0{,}12}{0{,}40} = 0{,}3$.
c) $P(A) \cdot P(B) = 0{,}30 \cdot 0{,}40 = 0{,}12 = P(A \cap B)$. Also sind A und B unabhängig. Passend dazu ist $P_A(B) = P(B) = 0{,}4$.
d) Additionssatz: $P(A \cup B) = 0{,}30 + 0{,}40 - 0{,}12 = 0{,}58$. Kontrolle über das Gegenereignis: $1 - 0{,}42 = 0{,}58$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Produktregel: $0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}10 = P(A \cap B)$. Die Ereignisse sind unabhängig.
b) $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}30 \neq 0{,}35$. Die Ereignisse sind abhängig; B macht A wahrscheinlicher.
c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$. Unabhängig.
d) $A = \{2, 4, 6\}$, also $P(A) = \frac{1}{2}$. $B = \{5, 6\}$, also $P(B) = \frac{1}{3}$. $A \cap B = \{6\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$. Die Ereignisse sind unabhängig.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Erste Stufe: Bus $0{,}40$, Rad $0{,}35$, zu Fuß $0{,}25$. Zweite Stufe: zu spät $0{,}10$, $0{,}05$, $0{,}02$. Pfad „Bus und zu spät“: $0{,}40 \cdot 0{,}10 = 0{,}04$.
b) Totale Wahrscheinlichkeit über alle drei Pfade:
$0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}0175 + 0{,}005 = 0{,}0625$.
c) Satz von Bayes: $P_{\text{spät}}(\text{Rad}) = \frac{0{,}0175}{0{,}0625} = 0{,}28$. Ein Zuspätkommer kam mit $28\,\%$ Wahrscheinlichkeit mit dem Rad.
d) Erwartungswert: $400 \cdot 0{,}0625 = 25$. Etwa 25 Schüler kommen zu spät.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Zwei Pfade führen zu „positiv“: krank und positiv $0{,}02 \cdot 0{,}95 = 0{,}019$, gesund und positiv $0{,}98 \cdot 0{,}04 = 0{,}0392$. Zusammen $0{,}0582$.
b) Bayes: $P_{\text{pos}}(\text{krank}) = \frac{0{,}019}{0{,}0582} \approx 0{,}326$. Nur etwa ein Drittel der positiv Getesteten ist wirklich krank.
c) $10\,000 \cdot 0{,}0582 = 582$ positive Tests. Davon krank: $10\,000 \cdot 0{,}019 = 190$. Die übrigen 392 sind Fehlalarme.
d) Der Test wirkt mit $95\,\%$ sehr zuverlässig. Weil aber $98\,\%$ der Menschen gesund sind, liefern schon $4\,\%$ von ihnen mehr positive Ergebnisse als alle Kranken zusammen.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Erste Stufe: Spam $0{,}3$, normal $0{,}7$. Zweite Stufe: markiert $0{,}98$ bzw. $0{,}01$. $P(\text{markiert}) = 0{,}3 \cdot 0{,}98 + 0{,}7 \cdot 0{,}01 = 0{,}294 + 0{,}007 = 0{,}301$.
b) $P_{\text{markiert}}(\text{Spam}) = \frac{0{,}294}{0{,}301} \approx 0{,}977$. Fast jede markierte Mail ist wirklich Spam.
c) Nicht markiert sind $1 - 0{,}301 = 0{,}699$. Davon Spam: $0{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}006$. Also $\frac{0{,}006}{0{,}699} \approx 0{,}0086$, etwa $0{,}9\,\%$.
d) Normale Mails, die markiert werden: $1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}01 = 7$. Etwa 7 normale Mails landen im Spam-Ordner.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Totale Wahrscheinlichkeit: $0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}018 + 0{,}020 = 0{,}038$, also $3{,}8\,\%$ Ausschuss.
b) Bayes: $P_{\text{Aus}}(M_2) = \frac{0{,}020}{0{,}038} \approx 0{,}526$. Obwohl Maschine 2 weniger produziert, stammt gut die Hälfte des Ausschusses von ihr.
c) Kein Ausschuss: $1 - 0{,}038 = 0{,}962$. Davon Maschine 1: $0{,}6 \cdot 0{,}97 = 0{,}582$. Also $\frac{0{,}582}{0{,}962} \approx 0{,}605$.
d) Ohne Maschine 2 kommen alle Teile von Maschine 1, der Ausschuss beträgt dann $3\,\%$. Er sinkt also von $3{,}8\,\%$ auf $3\,\%$, wenn Maschine 1 die ganze Menge schafft.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Erste Stufe: Regen heute $0{,}3$, kein Regen $0{,}7$. Nach Regen: morgen Regen $0{,}6$, kein Regen $0{,}4$. Nach trockenem Tag: $0{,}2$ und $0{,}8$. An jedem Verzweigungspunkt ist die Summe 1.
b) Zwei Pfade führen zu „morgen Regen“: $0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$.
c) Bayes: $\frac{0{,}18}{0{,}32} = 0{,}5625$. Regnet es morgen, hat es mit etwa $56\,\%$ auch heute geregnet.
d) Nein. $P(\text{morgen Regen}) = 0{,}32$, unter der Bedingung „heute Regen“ aber $0{,}6$. Da die Werte verschieden sind, beeinflusst das heutige Wetter das morgige.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Bedingung: erster Würfel 5. Es bleiben 6 gleich wahrscheinliche Ergebnisse $(5|1), \ldots, (5|6)$. Summe mindestens 10 bei $(5|5)$ und $(5|6)$: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
b) Augensumme 8 haben $(2|6), (3|5), (4|4), (5|3), (6|2)$, also 5 Ergebnisse. Gerade erste Zahl bei $2, 4, 6$: $\frac{3}{5} = 0{,}6$.
c) Ja. Egal was der erste Würfel zeigt, genau eine Zahl des zweiten Würfels ergibt die Summe 7. Also ist die bedingte Wahrscheinlichkeit immer $\frac{1}{6} = P(\text{Summe } 7)$.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Gesucht ist ein Innenfeld der Tafel: $\frac{190}{500} = 0{,}38$.
b) Unter 16: $\frac{190}{200} = 0{,}95$. Ab 16: $\frac{210}{300} = 0{,}70$. Jüngere nutzen soziale Medien also deutlich häufiger.
c) Insgesamt nutzen $\frac{400}{500} = 0{,}8$. Bei Unabhängigkeit müsste in beiden Altersgruppen der Anteil $0{,}8$ sein. Mit $0{,}95$ und $0{,}70$ sind Alter und Nutzung abhängig.

d) Bei Unabhängigkeit wären $80\,\%$ der 300 Älteren Nutzer: $0{,}8 \cdot 300 = 240$ statt 210. Dann wären es bei den Jüngeren $400 - 240 = 160$.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Erste Karte Ass: $\frac{4}{32}$, danach noch 3 Asse unter 31 Karten: $\frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{12}{992} = \frac{3}{248} \approx 0{,}012$.
b) Zwei Pfade (Ass dann Nicht-Ass, oder umgekehrt), beide mit $\frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31}$: $2 \cdot \frac{112}{992} = \frac{7}{31} \approx 0{,}226$.
c) Über das Gegenereignis „kein Ass“: $1 - \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} = 1 - \frac{756}{992} = \frac{236}{992} = \frac{59}{248} \approx 0{,}238$.
d) Nach einem Ass liegen noch 3 Asse unter 31 Karten: $P = \frac{3}{31} \approx 0{,}097$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Totale Wahrscheinlichkeit: $0{,}001 \cdot 0{,}99 + 0{,}999 \cdot 0{,}05 = 0{,}00099 + 0{,}04995 = 0{,}05094$.
b) Bayes: $\frac{0{,}00099}{0{,}05094} \approx 0{,}0194$. Nur etwa $1{,}9\,\%$ der Alarme sind berechtigt.
c) Fehlalarme: $100\,000 \cdot 0{,}999 \cdot 0{,}05 = 4995$ Reisende.
d) Berechtigte Alarme haben den Anteil $0{,}00099$. Fehlalarme $0{,}999 \cdot q$ müssen kleiner sein: q. Die Fehlalarmquote müsste unter etwa $0{,}1\,\%$ liegen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Von 12 Losen sind 3 Gewinne: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
b) Zwei Pfade: $\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{6+27}{132} = \frac{33}{132} = \frac{1}{4}$. Das zweite Kind hat dieselbe Chance wie das erste.
c) Gegenereignis: Keiner gewinnt, $\frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{504}{1320}$. Also $1 - \frac{504}{1320} = \frac{816}{1320} = \frac{34}{55} \approx 0{,}618$.
d) $P(G_1 \cap G_2) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{22} \approx 0{,}045$, aber $P(G_1) \cdot P(G_2) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$. Die Werte sind verschieden, die Ereignisse sind abhängig.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{180}{300} = 0{,}60$. $60\,\%$ der Kinder treiben Sport im Verein.
b) Jungen: $\frac{96}{150} = 0{,}64$. Mädchen: $\frac{84}{150} = 0{,}56$.
c) Bei Unabhängigkeit wäre der Anteil in beiden Gruppen $0{,}60$. Mit $0{,}64$ und $0{,}56$ gilt exakte Unabhängigkeit nicht, der Unterschied ist aber klein.
d) Unabhängigkeit verlangt $P(J \cap V) = P(J) \cdot P(V) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$, also $0{,}3 \cdot 300 = 90$ Jungen im Verein.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Unabhängigkeit: $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$. Dann $P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$.
b) $P_B(A) = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$. Das ist kleiner als $P(A) = 0{,}4$: Tritt B ein, wird A unwahrscheinlicher. Die Ereignisse sind abhängig.
c) Die Schnittmenge ist höchstens so groß wie das kleinere Ereignis: $P(A \cap B) \leq 0{,}4$.

Die Untergrenze ist $\max\{0;\, 0{,}4 + 0{,}5 - 1\} = 0$. Also $0 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}4$.
d) Ausschließen heißt $P(A \cap B) = 0$. Dann ist $P_B(A) = 0 \neq 0{,}4$, die Ereignisse sind also stark abhängig.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Definition einsetzen: $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$. Multiplikation mit $P(B) > 0$ liefert $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Jeder Schritt ist umkehrbar, also sind beide Bedingungen gleichwertig.
b) Mit $P(A) > 0$: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$. Unabhängigkeit ist also symmetrisch.
c) $0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 = P(A \cap B)$. $P_B(A) = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2 = P(A)$ und $P_A(B) = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5 = P(B)$. Alles stimmt überein.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Das erste Kind hat irgendeinen Tag. Das zweite muss einen der 6 anderen Tage haben, das dritte einen der übrigen 5: $1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{49} \approx 0{,}612$.
b) Gegenereignis zu a): $1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49} \approx 0{,}388$.
c) Für vier Kinder: $1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} = 1 - \frac{120}{343} \approx 0{,}650$. Für drei Kinder sind es nur $0{,}388$. Also ist die Wahrscheinlichkeit ab vier Kindern erstmals größer als $50\,\%$.