Lösungen zur Klassenarbeit - Änderungsrate und Ableitungsbegriff

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (3 BE/Punkte)

a) Die mittlere Änderungsrate auf $[a;b]$ ist der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Funktionswerte: $f(4)=16-8=8$ und $f(1)=1-2=-1$ (1 P.). Damit $\frac{8-(-1)}{4-1}=\frac{9}{3}=3$ (1 P.). Vorsicht beim Minuszeichen: $8-(-1)=9$, nicht 7.
b) Geometrisch ist das die Steigung der Sekante durch die Kurvenpunkte $P(1|-1)$ und $Q(4|8)$. Inhaltlich bedeutet sie: Auf dem Intervall $[1;4]$ nimmt f im Durchschnitt um 3 Einheiten zu, wenn x um 1 wächst (1 P.). Über die Steigung an einzelnen Stellen sagt dieser Mittelwert nichts aus; bei $x=1$ ist der Graph zum Beispiel waagerecht, bei $x=4$ hat er die Steigung 6.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) $f(2)=4+6=10$. Differenzenquotient zwischen $x_0=2$ und $2+h$:
$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2+3(2+h)-10}{h}$ (1 P.). Ausmultiplizieren mit der binomischen Formel:
$\frac{4+4h+h^2+6+3h-10}{h}=\frac{7h+h^2}{h}$ (1 P.). Für $h\neq 0$ darf man durch h kürzen: $7+h$ (1 P.).
b) Lässt man h gegen 0 gehen, bleibt $f'(2)=\lim_{h\to 0}(7+h)=7$. Die Tangente durch $P(2|10)$ mit Steigung 7 lautet $y=7(x-2)+10=7x-4$ (1 P.). Kontrolle mit der Ableitungsregel: $f'(x)=2x+3$, also $f'(2)=7$. Das Kürzen vor dem Grenzübergang ist entscheidend, weil man $h=0$ nicht direkt einsetzen darf.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Jeder Abschnitt dauert 30 min $=0{,}5$ h. Mittlere Geschwindigkeit gleich Wegzuwachs durch Zeit. Erster Abschnitt: $\frac{9-0}{0{,}5}=18$ km/h. Zweiter: $\frac{21-9}{0{,}5}=24$ km/h. Dritter: $\frac{27-21}{0{,}5}=12$ km/h (2 P.).
b) Am schnellsten war die Fahrt zwischen 30 und 60 Minuten mit 24 km/h, am langsamsten in der letzten halben Stunde mit 12 km/h, vielleicht wegen einer Steigung oder Müdigkeit (1 P.).
c) Gesamtstrecke 27 km in $1{,}5$ h: $\frac{27}{1{,}5}=18$ km/h (1 P.). Achtung: Im Allgemeinen ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht der Mittelwert der Abschnittsgeschwindigkeiten; hier stimmt $\frac{18+24+12}{3}=18$ nur deshalb überein, weil alle Abschnitte gleich lang dauern. Antwort: 18, 24 und 12 km/h; Durchschnitt 18 km/h.

Lösung zu Aufgabe 4 (6 BE/Punkte)

a) $N(10)=3\cdot 100+10\cdot 10=300+100=400$. In den ersten zehn Minuten passierten 400 Fahrzeuge die Zählstelle (1 P.).

b) $N(20) = 1200 + 200 = 1400$. Mittlere Änderungsrate: $\frac{1400-400}{20-10} = \frac{1000}{10} = 100$ Fahrzeuge pro Minute (2 P.). Die Einheit ergibt sich aus Fahrzeuge geteilt durch Minuten.
c) $\frac{N(10+h)-N(10)}{h} = \frac{3(100+20h+h^2)+100+10h-400}{h} = \frac{70h+3h^2}{h} = 70 + 3h$. Für $h \to 0$ erhält man $N'(10) = 70$ Fahrzeuge pro Minute (1 P.).
d) Bei $t = 10$ fließen momentan 70 Fahrzeuge pro Minute, im Intervall $[10; 20]$ im Durchschnitt 100 (1 P.). Weil $N'(t) = 6t + 10$ mit der Zeit wächst, ist die Rate am Anfang des Intervalls kleiner als ihr Mittelwert; es fahren immer mehr Autos pro Minute vorbei (1 P.).

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) $f(2) = |0| = 0$. Differenzenquotient $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{|h|}{h}$. Für $h = 0{,}5$: $\frac{0{,}5}{0{,}5} = 1$. Für $h = -0{,}5$: $\frac{|-0{,}5|}{-0{,}5} = \frac{0{,}5}{-0{,}5} = -1$ (2 P.).
b) Für jedes $h > 0$ ist $\frac{|h|}{h} = 1$, für jedes $h < 0$ ist $\frac{|h|}{h} = -1$. Der rechtsseitige Grenzwert ist also 1, der linksseitige -1. Da beide verschieden sind, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht, und f ist bei $x_0 = 2$ nicht differenzierbar (1 P.). Anschaulich hat der Graph dort eine Spitze (Knick): Von links kommt eine Gerade mit Steigung -1, nach rechts geht eine mit Steigung 1 weiter; man kann keine eindeutige Tangente anlegen. Stetig ist f bei 2 trotzdem.