Lernzettel - Änderungsrate und Ableitungsbegriff

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Wie schnell warst du wirklich?

Du fährst mit dem Bus 30 Kilometer in 40 Minuten. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt dann 45 km/h. Der Tacho zeigt aber zwischendurch 0 km/h an der Ampel und 70 km/h auf der Landstraße. Der Durchschnitt ist die **mittlere Änderungsrate** des Weges, der Tacho zeigt die **momentane Änderungsrate**. Genau diesen Übergang von der mittleren zur momentanen Änderung, den Grenzwert, nennt man Ableitung. Er ist der zentrale Gedanke der Differenzialrechnung und die Grundlage für alle weiteren Kapitel der Einführungsphase.

Mittlere Änderungsrate

Wie stark ändert sich eine Größe in einem Intervall? Für eine Funktion f und ein Intervall $[a;b]$ heißt

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

die **mittlere Änderungsrate** oder der **Differenzenquotient**. Geometrisch ist das die Steigung der **Sekante** durch die Punkte $(a\,|\,f(a))$ und $(b\,|\,f(b))$. Im Sachzusammenhang ist es eine Durchschnittsgeschwindigkeit, ein durchschnittlicher Zuwachs oder eine durchschnittliche Temperaturänderung pro Zeiteinheit.
Beispiel. Ein Fahrzeug legt in der Zeit t (in s) den Weg $s(t)=5t^2$ (in m) zurück. Im Intervall $[1;3]$ gilt $\frac{s(3)-s(1)}{3-1}=\frac{45-5}{2}=20$. Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Momentane Änderungsrate und Ableitung

Bei einem Tacho interessiert dich nicht die Durchschnitts-, sondern die **momentane** Geschwindigkeit. Dafür lässt man das Intervall immer kleiner werden. Mit $b=x_0+h$ betrachtest du den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und lässt h gegen null gehen. Strebt dieser Wert gegen eine feste Zahl, so heißt sie **momentane Änderungsrate** oder **Ableitung** von f an der Stelle x_0, geschrieben $f'(x_0)$. Man sagt, f ist an der Stelle x_0 **differenzierbar**. Geometrisch ist $f'(x_0)$ die Steigung der **Tangente** an den Graphen im Punkt $(x_0\,|\,f(x_0))$.
Ordnet man jeder Stelle x die Ableitung $f'(x)$ zu, entsteht die **Ableitungsfunktion** f'.

Die h-Methode

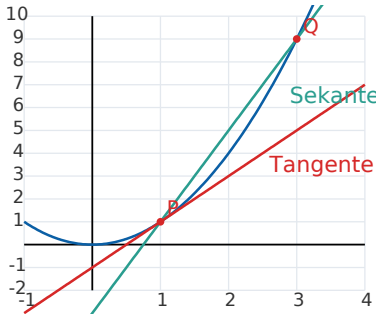
Zur Berechnung von $f'(x_0)$ gehst du so vor: Differenzenquotient aufschreiben, Zähler ausmultiplizieren und vereinfachen, durch h kürzen und erst dann $h \to 0$ gehen lassen.

Beispiel 1. $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$:

Also $f'(2) = 4$. Für $h = 1$ ist der Wert 5, für $h = 0{,}1$ ist er $4{,}1$, für $h = 0{,}01$ ist er $4{,}01$. Der Wert nähert sich der 4.

Beispiel 2. Allgemein für $f(x) = x^2$ an einer Stelle x_0: $\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \to 2x_0$. Also gilt $f'(x) = 2x$.

Beispiel 3. $f(x) = x^3$ bei $x_0 = 1$: $\frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = 3 + 3h + h^2 \to 3$. Also $f'(1) = 3$.



Die Abbildung zeigt $f(x) = x^2$, die Sekante durch $P(1\,|\,1)$ und $Q(3\,|\,9)$ mit Steigung $\frac{9-1}{3-1} = 4$ und die Tangente in P mit Steigung $f'(1) = 2$. Schiebt man Q näher an P, dreht sich die Sekante in die Tangente.

Interpretation im Sachzusammenhang

Ist $s(t)$ der zurückgelegte Weg, so ist $s'(t)$ die Momentangeschwindigkeit. Ist $V(t)$ das Volumen in einem Becken, so ist $V'(t)$ die momentane Zuflussrate. Die Einheit der Änderungsrate ist immer „Einheit der Funktionswerte pro Einheit von x“, zum Beispiel Meter pro Sekunde oder Liter pro Minute. Ein positiver Wert bedeutet Wachstum, ein negativer Wert Abnahme, und $f'(x_0) = 0$ bedeutet eine waagerechte Tangente.

Beispiel 4. Für $f(x) = -x^2 + 4x$ gilt an der Stelle $x_0 = 2$: $\frac{-(2+h)^2 + 4(2+h) - 4}{h} = \frac{-h^2}{h} = -h \to 0$. Bei $x = 2$ liegt der Scheitelpunkt, die Tangente verläuft waagerecht.

Ablesen aus Graphen und Tabellen

Oft ist keine Funktionsgleichung gegeben, sondern nur ein Graph oder eine Wertetabelle. Dann berechnest du die mittlere Änderungsrate direkt aus zwei Wertepaaren. Die momentane Änderungsrate schätzt du, indem du an den Graphen im gewünschten Punkt eine Tangente anlegst und ein Steigungsdreieck zeichnest: Du gehst eine Einheit nach rechts und liest ab, um wie viele Einheiten die Tangente steigt oder fällt. Bei Messwerten verwendest du ein möglichst kleines Intervall um die gesuchte Stelle, denn dann ist die

mittlere Änderungsrate eine gute Näherung für die momentane.

Beispiel 5. Eine Pflanze hat nach 2, 4 und 6 Wochen die Höhen 10 cm, 18 cm und 22 cm. In den ersten beiden Wochen wächst sie im Mittel $\frac{18-10}{4-2} = 4$ cm pro Woche, danach nur noch $\frac{22-18}{6-4} = 2$ cm pro Woche. Das Wachstum verlangsamt sich, die Steigung des Graphen wird kleiner.

Wichtige Zusammenhänge

- Sekantensteigung = mittlere Änderungsrate, Tangentensteigung = momentane Änderungsrate.
- Für lineare Funktionen $f(x) = mx + b$ ist die Änderungsrate überall m.
- Die Ableitung ist der Grenzwert der Sekantensteigungen für $h \to 0$.

Definition: Differenzenquotient

Für eine Funktion f und zwei Stellen $a \neq b$ heißt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der **Differenzenquotient** oder die **mittlere Änderungsrate** von f im Intervall $[a;b]$. Geometrisch ist er die Steigung der **Sekante** durch die Punkte $(a \mid f(a))$ und $(b \mid f(b))$.

Definition: Differenzialquotient

Existiert der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, so heißt er **Differenzialquotient** oder **Ableitung** von f an der Stelle x_0, geschrieben $f'(x_0)$. Geometrisch ist $f'(x_0)$ die Steigung der **Tangente** im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$. Existiert der Grenzwert, heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

So gehst du vor: Die h-Methode

1. Schreibe den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ auf.
2. Setze $f(x_0+h)$ und $f(x_0)$ ein und multipliziere aus.
3. Kürze h im Zähler und Nenner (das geht, weil $h \neq 0$ ist).
4. Lasse h gegen 0 gehen: Alle Terme mit h verschwinden. Der Rest ist $f'(x_0)$.

Beispiel 5

Berechne die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ mit der h-Methode.

$\frac{(3+h)^2-9}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$. Für $h \to 0$ bleibt 6. Also $f'(3) = 6$: Die Tangente an die Normalparabel im Punkt $(3 \mid 9)$ hat die Steigung 6.

Beispiel 6

Bestimme die mittlere Änderungsrate von $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[1;9]$ und deute sie.

$\frac{f(9)-f(1)}{9-1} = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$. Auf dem Intervall wächst die Wurzelfunktion im Mittel um $0{,}25$ pro Einheit. Die Sekante hat die Steigung $\frac{1}{4}$. Die Funktion steigt am Anfang steiler als am Ende, das Mittel liegt dazwischen.

Beispiel 7

Ein Auto fährt nach der Zeit t (in Sekunden) die Strecke $s(t) = 2t^2$ (in Metern). Wie schnell ist es nach 5 s?

Differenzenquotient bei $t_0 = 5$: $\frac{2(5+h)^2-50}{h} = \frac{20h+2h^2}{h} = 20 + 2h \to 20$. Die Momentangeschwindigkeit beträgt 20 m/s, also 72 km/h. Die Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten fünf Sekunden ist dagegen nur $\frac{50}{5} = 10$ m/s.

Merke: Sekantensteigung und Tangentensteigung

Je kleiner das Intervall um x_0 gewählt wird, desto näher kommt die Sekantensteigung der Tangentensteigung. Bei Aufgaben mit Tabellen kannst du $f'(x_0)$ näherungsweise durch die Sekante über ein kleines Intervall um x_0 schätzen, zum Beispiel durch $\frac{f(x_0+1)-f(x_0-1)}{2}$.

Achtung

Die mittlere Änderungsrate und die momentane Änderungsrate sind **nicht** dasselbe. Bei $f(x) = x^2$ ist die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0;4]$ gleich 4, die momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 2$ ebenfalls 4, aber an der Stelle $x_0 = 1$ nur 2. Außerdem darfst du in der h-Methode nicht sofort $h = 0$ einsetzen: Dann stünde im Nenner eine Null. Erst nach dem Kürzen lässt du $h \to 0$ gehen.

Beispiel 8

Die Einwohnerzahl einer Stadt beträgt 2015 genau $51\,700$ und 2020 genau $54\,100$. Wie groß ist die mittlere Änderungsrate?

$\frac{54\,100-51\,700}{5} = \frac{2400}{5} = 480$ Einwohner pro Jahr. Diese Zahl sagt nichts darüber, wie schnell die Stadt in einem einzelnen Jahr gewachsen ist; sie gilt nur im Durchschnitt über den Zeitraum.

Hinweis: Einheiten der Änderungsrate

Die Einheit einer Änderungsrate ist immer die Einheit der Funktionswerte geteilt durch die Einheit der Eingabe. Wird der Weg in Metern und die Zeit in Sekunden gemessen, ist die Änderungsrate in Metern pro Sekunde angegeben. Wird die Temperatur in Grad Celsius und die Zeit in Minuten gemessen, erhältst du Grad pro Minute. Ein Antwortsatz mit der richtigen Einheit ist in der Klausur fast immer Pflicht.

Satz: Ableitungen aus der h-Methode

Mit der h-Methode erhältst du für die wichtigsten Funktionen: $(c)' = 0$, $(mx + b)' = m$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. Im nächsten Kapitel verallgemeinert die Potenzregel diese Ergebnisse zu $(x^n)' = n\,x^{n-1}$. Der Aufwand der h-Methode lohnt sich also nur einmal beim Verstehen des Begriffs; danach rechnest du mit den Regeln.

Wusstest du?

Isaac Newton nannte die Ableitung „Fluxion“ und dachte an die „Fließgeschwindigkeit“ einer sich bewegenden Größe. Der Tacho im Auto misst keine Ableitung im streng mathematischen Sinn, sondern berechnet die Geschwindigkeit aus der Zahl der Radumdrehungen in einem sehr kurzen Zeitintervall. Auch das ist eine Näherung des Grenzwerts: ein kleines h statt $h \to 0$.

Beispiel 10

Die Temperatur einer Suppe sinkt in einer Schulkantine von 90 °C auf 70 °C in den ersten zehn Minuten und dann auf 58 °C in den nächsten zehn Minuten. Vergleiche die mittleren Änderungsraten.

Im ersten Intervall gilt $\frac{70-90}{10} = -2$ °C pro Minute, im zweiten $\frac{58-70}{10} = -1{,}2$ °C pro Minute. Die Suppe kühlt zunehmend langsamer ab, weil der Unterschied zur Raumtemperatur kleiner wird. Die Änderungsrate ist negativ, weil die Temperatur fällt; ihr Betrag beschreibt, wie schnell das passiert. Aus zwei Werten allein lässt sich allerdings keine Aussage über einen einzelnen Zeitpunkt ableiten, dafür bräuchtest du die momentane Änderungsrate.

Beispiel 9

Zeige, dass die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

Für $h > 0$ ist der Differenzenquotient $\frac{|h|}{h} = 1$. Für h ist er $\frac{|h|}{h} = -1$. Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind verschieden, der Grenzwert existiert also nicht. Der Graph hat bei $x = 0$ einen Knick, dort gibt es keine eindeutige Tangente.

Häufige Fehler

- h schon vor dem Kürzen null setzen: Dann steht im Nenner 0. Erst kürzen, dann $h \to 0$.
- Beim Ausmultiplizieren von $(x_0 + h)^2$ den Mittelterm $2x_0h$ vergessen.
- Mittlere und momentane Änderungsrate verwechseln.
- Die Einheit im Antwortsatz weglassen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Mittlere Änderungsrate = Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = Sekantensteigung im Intervall $[a;b]$.
- Momentane Änderungsrate = Ableitung $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = Tangentensteigung.
- h-Methode: einsetzen, ausmultiplizieren, durch h kürzen, dann $h \to 0$.
- Aus Tabellen schätzt du die Ableitung durch die Sekante über ein kleines Intervall um die Stelle.
- Die Einheit der Änderungsrate ist (Einheit der Funktionswerte) pro (Einheit der Eingabe).
- An Knickstellen wie $|x|$ bei 0 ist die Funktion nicht differenzierbar.
- Grundergebnisse: $(c)' = 0$, $(mx+b)' = m$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Rechne zuerst einige Differenzenquotienten mit $h = 1$, $h = 0{,}1$ und $h = 0{,}01$ aus. Du erkennst dann den Grenzwert, noch bevor du die Rechnung allgemein durchführst, und kannst dein Ergebnis kontrollieren.

Grenzwertidee

Der Grenzwert ist keine Zauberei: Du setzt h nicht wirklich gleich null, sondern fragst, welcher feste Wert sich einstellt, wenn h beliebig klein wird. Im Beispiel $4 + h$ kommt der Wert der Zahl 4 beliebig nahe, ohne dass h jemals exakt null sein muss. Diese Denkweise bildet die Grundlage für die gesamte Analysis.

Merksatz

Die Ableitung $f'(x_0)$ beschreibt, wie schnell sich f an der Stelle x_0 gerade ändert. Mit dieser Idee beginnt die Differentialrechnung, die in den folgenden Kapiteln zu praktischen Regeln führt, mit denen du Ableitungen ohne Grenzwertrechnung bestimmen kannst.