Arbeitsblatt - Änderungsrate und Ableitungsbegriff

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Mittlere Änderungsrate berechnen

Die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[a;b]$ ist $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Berechne sie und gib an, ob f im Mittel steigt oder fällt.

a) $f(x)=x^2$ in $[1;3]$
b) $f(x)=x^3$ in $[0;2]$
c) $f(x)=2x+5$ in $[1;4]$
d) $f(x)=\sqrt{x}$ in $[1;9]$
e) $f(x)=-x^2+4x$ in $[0;4]$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Sekanten werden zu Tangenten

Für $f(x)=x^2$ soll die Steigung im Punkt $P(2\,|\,4)$ untersucht werden. Berechne die Steigung der Sekante durch P und $Q(2+h\,|\,f(2+h))$ für kleiner werdende h.

h	1	0,5	0,1	0,01
Sekantensteigung $\frac{(2+h)^2-4}{h}$	5	4{,}5	4{,}1	4{,}01

a) Prüfe die Werte in der Tabelle durch Rechnung für $h=1$ und $h=0{,}1$.
b) Vereinfache den Differenzenquotienten allgemein.
c) Welchem Wert nähern sich die Sekantensteigungen? Was bedeutet das geometrisch?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – h-Methode an der Normalparabel

Bestimme mit der h-Methode die Ableitung von $f(x)=x^2$ an den Stellen.

a) $x_0=1$
b) $x_0=-2$
c) $x_0=0$
d) einer beliebigen Stelle x_0

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – h-Methode mit Zusatzgliedern

Berechne die Ableitung mit der h-Methode. Notiere jeden Zwischenschritt.

a) $f(x) = x^2 + 2x$ an der Stelle $x_0 = 1$
b) $f(x) = 3x^2 - x$ an der Stelle $x_0 = 2$
c) $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 2$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Ableitung aus Tabellen schätzen

Die Tabelle zeigt einige Werte von $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0,5	2	4,5	8

a) Berechne die mittleren Änderungsraten in den Intervallen $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$.
b) Schätze $f'(2)$ durch die Sekantensteigung über $[1;3]$.
c) Vergleiche mit dem exakten Wert aus der Regel $(x^2)' = 2x$.
d) Warum steigen die Sekantensteigungen von Intervall zu Intervall?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Die Busfahrt

Ein Linienbus fährt von der Haltestelle ab. Die Tabelle zeigt, wie weit er nach t Sekunden gekommen ist.

Zeit t in s	0	2	4	6	8
Weg s in m	0	8	28	54	80

a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit in jedem Intervall (in m/s).
b) Rechne die Geschwindigkeit im letzten Intervall in km/h um.
c) In welchem Intervall ist der Bus am langsamsten, in welchem am schnellsten?
d) Schätze die Momentangeschwindigkeit nach 4 s durch das Intervall $[2;6]$.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Das Schwimmbad im Hochsommer

Das Becken eines Freibads wird morgens um 6 Uhr gefüllt. Der Wasserstand beträgt nach t Stunden $h(t) = 0{,}2t^2$ Meter ($0 \le t \le 3$).

a) Wie hoch steht das Wasser um 8 Uhr und um 9 Uhr?
b) Berechne die mittlere Füllgeschwindigkeit zwischen 6 Uhr und 9 Uhr.
c) Bestimme mit der h-Methode die momentane Füllgeschwindigkeit nach 2 Stunden.
d) Wann wäre der Wasserstand 1 m hoch, wenn das Modell weiter gälte?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Fieber im Krankenhaus

Bei einem Patienten wird alle drei Stunden die Körpertemperatur gemessen.

Uhrzeit	6	9	12	15	18
Temperatur in °C	37,2	38,4	39,1	38,5	37,6

a) Berechne die mittleren Änderungsraten pro Stunde in den vier Intervallen.
b) Wann stieg das Fieber am stärksten?
c) Wann fiel das Fieber am schnellsten?
d) In welchem Intervall liegt etwa der Höhepunkt der Kurve? Begründe mit dem Vorzeichen der Änderungsrate.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der Bremsvorgang

Ein Auto bremst auf der Landstraße. Für $0 \le t \le 4$ beschreibt $s(t) = 20t - 2{,}5t^2$ den Weg in Metern nach t Sekunden.

a) Berechne den Weg nach 2 s und nach 4 s.
b) Berechne die mittlere Geschwindigkeit in $[0;4]$ und in $[0;2]$.
c) Bestimme mit der h-Methode die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t_0 = 0$ und $t_0 = 2$.
d) Wie lang ist der Bremsweg? Wie schnell war das Auto zu Beginn in km/h?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Modellrakete

Eine Modellrakete steigt nach dem Start in den ersten 10 Sekunden gemäß $h(t) = 2t^2$ (in Metern) auf.

a) Welche Höhe hat sie nach 10 Sekunden?
b) Bestimme die mittlere Steiggeschwindigkeit in $[0;10]$ und in $[5;10]$.
c) Berechne die Momentangeschwindigkeit nach 10 Sekunden mit der h-Methode.
d) Vergleiche die drei Zahlen und erkläre, warum sie verschieden sind.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Wachstum einer Stadt

Die Stadtverwaltung erstellt eine Statistik zur Einwohnerzahl.

Jahr	2010	2015	2020	2024
Einwohner	48\,200	51\,700	54\,100	55\,300

a) Berechne die mittlere Änderungsrate pro Jahr für die drei Zeiträume.
b) Beschreibe, wie sich das Wachstum entwickelt.
c) Welche Einwohnerzahl erwartest du 2030, wenn die Rate wie im letzten Zeitraum

bleibt?
d) Warum ist die Rate nur ein Durchschnitt?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Handy am Ladegerät

Das Akku-Ladestandsprotokoll eines Smartphones sieht so aus:

Ladezeit in h	0	1	2	3	4
Ladestand in %	10	40	65	85	95

a) Berechne die mittlere Ladegeschwindigkeit in jeder Stunde (Prozentpunkte pro Stunde).
b) Beschreibe den Verlauf in Worten.
c) Schätze, wie viel Prozent das Handy nach fünf Stunden erreicht, wenn die Rate weiter um etwa 10 Prozentpunkte pro Stunde sinkt.
d) Warum lädt das Handy zum Schluss langsamer?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Der Ball auf dem Sportplatz

Ein Ball wird auf dem Sportplatz hochgeworfen. Seine Höhe in Metern nach t Sekunden ist $h(t) = 1 + 8t - 5t^2$.

a) Wie hoch ist der Ball nach $0{,}5$ s und nach 1 s?
b) Berechne die mittlere Geschwindigkeit in $[0;1]$ und in $[0{,}5;1]$.
c) Bestimme mit der h-Methode die Momentangeschwindigkeit bei $t_0 = 0{,}5$.
d) Wann ist die Momentangeschwindigkeit Null und wie hoch ist der Ball dann?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Kaffee in der Kantine

Ein Becher Kaffee kühlt in der Schulkantine ab. Gemessen wurde:

Zeit in min	0	5	10	15	20
Temperatur in °C	80	60	48	40	35

a) Berechne die mittleren Änderungsraten pro Minute.
b) Wie ändert sich die Abkühlungsgeschwindigkeit? Erkläre den Grund.
c) Schätze die Temperatur nach 12 Minuten.
d) Bei welcher Temperatur ist der Kaffee zum Trinken geeignet (etwa 45 °C)? Gib einen groben Zeitpunkt an.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Abschnittskontrolle auf der Autobahn

Ein Reisebus fährt auf der Autobahn. Die zurückgelegte Strecke wird alle zehn Minuten

notiert.

Zeit in min	0	10	20	30	40
Strecke in km	0	18	35	50	66

a) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit in jedem Zehn-Minuten-Intervall in km/h.
b) In einem Baustellenabschnitt von Minute 10 bis Minute 20 gilt Tempo 100. Hat der Bus sich daran gehalten?
c) Wie schnell war der Bus im gesamten Zeitraum im Mittel?
d) Kann der Bus zwischendurch schneller als im Mittel gefahren sein? Erkläre.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Wo ist die Änderungsrate Null?

Gegeben ist $f(x) = x^2 - 4x$.

a) Berechne mit der h-Methode die Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0.
b) Wo ist die Tangente waagerecht?
c) Berechne $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$ und deute die Vorzeichen.
d) Berechne die mittlere Änderungsrate in $[0;4]$ und vergleiche.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Differenzierbarkeit prüfen

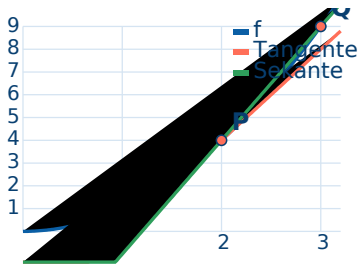
Gegeben ist $f(x) = |x|$. Zeichne dazu den Graphen im Kopf: ein V mit der Spitze im Ursprung.

a) Berechne den Differenzenquotienten an der Stelle 0 für $h = 0{,}1$ und $h = -0{,}1$.
b) Welche Werte erhältst du für $h \to 0^+$ und $h \to 0^-$?
c) Was folgt für die Differenzierbarkeit an der Stelle 0?
d) Ist f bei $x_0 = 2$ differenzierbar? Berechne dort die Ableitung.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Sekanten und Tangenten im Bild

Die Abbildung zeigt die Parabel $f(x) = x^2$, die Tangente im Punkt $P(2\,|\,4)$ und die Sekante durch P und $Q(3\,|\,9)$.



a) Berechne die Steigung der Sekante PQ.

b) Berechne die Steigung der Tangente in P.
c) Gib die Gleichung der Tangente an und prüfe die Abbildung.
d) Wie müsste man Q wählen, damit die Sekante noch näher an der Tangente liegt?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Differenzierbar oder nicht?

Die Funktion f ist abschnittsweise definiert: $f(x) = x^2$ für $x \leq 1$ und $f(x) = 2x - 1$ für $x > 1$.

a) Zeige, dass f an der Stelle 1 stetig ist.
b) Berechne den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0^-$.
c) Berechne den rechtsseitigen Grenzwert für $h \to 0^+$.
d) Ist f bei $x_0 = 1$ differenzierbar?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Der Radfahrer am Berg

Die Höhe eines Radwegs über dem Meeresspiegel beträgt $h(x) = \frac{1}{200}x^2$ Meter (x Entfernung vom Startpunkt in Metern, $0 \leq x \leq 100$).

a) Berechne die mittlere Steigung zwischen $x = 0$ und $x = 100$ in Prozent.
b) Berechne mit der h-Methode die Steigung bei $x_0 = 60$ und bei $x_0 = 100$.
c) Wo ist die Steigung gleich der mittleren Steigung? Vergleiche mit der Mitte des Intervalls.
d) Ein Hinweisschild warnt ab $8\,\%$ Steigung. Ab welcher Stelle gilt das?