Lösungen - Änderungsrate und Ableitungsbegriff

Klasse: Einfuehrungsphase

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f(3) = 9$, $f(1) = 1$, also $\frac{9-1}{3-1} = 4$. Die Rate ist positiv: f steigt im Mittel.
b) $f(2) = 8$, $f(0) = 0$, also $\frac{8-0}{2-0} = 4$. Positiv, f steigt im Mittel.
c) $f(4) = 13$, $f(1) = 7$, also $\frac{13-7}{3} = 2$. Das ist genau die Steigung $m = 2$ der Geraden; bei linearen Funktionen ist die mittlere Rate überall gleich.
d) $f(9) = 3$, $f(1) = 1$, also $\frac{3-1}{9-1} = 0{,}25$. f steigt im Mittel, aber nur langsam.
e) $f(4) = -16 + 16 = 0$ und $f(0) = 0$, also $\frac{0-0}{4} = 0$. Im Mittel keine Änderung: Der Graph steigt erst und fällt dann wieder auf dieselbe Höhe.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $h = 1$: $\frac{(3)^2-4}{1} = \frac{9-4}{1} = 5$. $h = 0{,}1$: $\frac{2{,}1^2-4}{0{,}1} = \frac{4{,}41-4}{0{,}1} = 4{,}1$. Beide Tabellenwerte stimmen.

b) Binomische Formel: $\frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4 + h$ für $h \neq 0$.

c) Für $h \to 0$ geht $4 + h$ gegen 4. Geometrisch werden die Sekanten durch P und Q zur Tangente in P. Ihre Steigung ist $f'(2) = 4$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2 + h$. Für $h \to 0$ folgt $f'(1) = 2$.

b) $\frac{(-2+h)^2-4}{h} = \frac{4-4h+h^2-4}{h} = -4 + h$. Für $h \to 0$ folgt $f'(-2) = -4$: Der Graph fällt dort.

c) $\frac{(0+h)^2-0}{h} = \frac{h^2}{h} = h \to 0$. Also $f'(0) = 0$: waagerechte Tangente im Scheitel.

d) $\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0 + h \to 2x_0$. Also $f'(x_0) = 2x_0$. Einsetzen bestätigt a) bis c): 2, -4, 0.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $f(1) = 3$. $\frac{(1+h)^2+2(1+h)-3}{h} = \frac{1+2h+h^2+2+2h-3}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4 + h \to 4$. Also $f'(1) = 4$.

b) $f(2) = 12 - 2 = 10$. $\frac{3(2+h)^2-(2+h)-10}{h} = \frac{12+12h+3h^2-2-h-10}{h} = \frac{11h+3h^2}{h} = 11 + 3h \to 11$. Also $f'(2) = 11$.

c) $\frac{(1+h)^3-1}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} = 3 + 3h + h^2 \to 3$. Also $f'(1) = 3$.

d) Hauptnenner bilden: $\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{2-(2+h)}{2(2+h)\,h} = \frac{-h}{2(2+h)h} = \frac{-1}{2(2+h)} \to -\frac{1}{4}$. Also $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

In jedem Fall wird erst vereinfacht und durch h gekürzt, erst danach darf man $h \to 0$ gehen lassen.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Intervalle haben alle die Breite 1, also ist die Rate gleich der Wertedifferenz: $0{,}5 - 0 = 0{,}5$; $2 - 0{,}5 = 1{,}5$; $4{,}5 - 2 = 2{,}5$; $8 - 4{,}5 = 3{,}5$.
b) $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4{,}5-0{,}5}{2} = 2$. Das ist der Schätzwert für $f'(2)$.
c) Aus $(x^2)' = 2x$ folgt $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$, also $f'(2) = 2$. Die Schätzung ist exakt, weil das Intervall symmetrisch um 2 liegt; das gilt bei Parabeln immer.
d) Die Parabel wird nach rechts immer steiler. Darum wachsen die Sekantensteigungen jeweils um 1.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Mittlere Geschwindigkeit $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$: $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{20}{2} = 10$, $\frac{26}{2} = 13$, $\frac{26}{2} = 13$ (jeweils m/s).
b) Von m/s nach km/h multipliziert man mit $3{,}6$: $13 \cdot 3{,}6 = 46{,}8$ km/h.
c) Am langsamsten im ersten Intervall mit 4 m/s, dort fährt der Bus gerade an. Am schnellsten in den letzten beiden Intervallen mit 13 m/s.
d) $\frac{s(6)-s(2)}{6-2} = \frac{54-8}{4} = 11{,}5$ m/s, das sind etwa $41{,}4$ km/h. Das Intervall liegt symmetrisch um $t = 4$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) 8 Uhr entspricht $t = 2$: $h(2) = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$ m. 9 Uhr entspricht $t = 3$: $h(3) = 0{,}2 \cdot 9 = 1{,}8$ m.
b) $\frac{h(3)-h(0)}{3-0} = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6$ m pro Stunde.
c) Wir nennen die Zeitänderung k, weil h schon die Höhe bezeichnet: $\frac{0{,}2(2+k)^2-0{,}8}{k} = \frac{0{,}8k+0{,}2k^2}{k} = 0{,}8 + 0{,}2k \to 0{,}8$. Nach zwei Stunden steigt das Wasser momentan um $0{,}8$ m pro Stunde.
d) $0{,}2t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = 5 \Rightarrow t = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ Stunden, also nach etwa 2 h 14 min, gegen 8:14 Uhr.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Alle Intervalle sind 3 Stunden lang: $\frac{1{,}2}{3} = 0{,}40$; $\frac{0{,}7}{3} \approx 0{,}23$; $\frac{-0{,}6}{3} = -0{,}20$; $\frac{-0{,}9}{3} = -0{,}30$ (°C pro Stunde).
b) Die größte positive Rate ist $0{,}4$ °C pro Stunde. Das Fieber stieg zwischen 6 und 9 Uhr am stärksten.
c) Die kleinste (am stärksten negative) Rate ist $-0{,}3$ °C pro Stunde zwischen 15 und 18 Uhr. Dann fiel das Fieber am schnellsten.
d) Zwischen 9 und 12 Uhr ist die Rate noch positiv, zwischen 12 und 15 Uhr schon

negativ. Der Höhepunkt liegt also zwischen 9 und 15 Uhr, etwa um 12 Uhr.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $s(2) = 40 - 10 = 30$ m und $s(4) = 80 - 40 = 40$ m.
b) $\frac{s(4)-s(0)}{4} = \frac{40}{4} = 10$ m/s und $\frac{s(2)-s(0)}{2} = \frac{30}{2} = 15$ m/s. In der ersten Hälfte ist das Auto im Mittel schneller.
c) $\frac{20(t_0+h)-2{,}5(t_0+h)^2-20t_0+2{,}5t_0^2}{h} = \frac{20h-5t_0h-2{,}5h^2}{h} = 20 - 5t_0 - 2{,}5h \to 20 - 5t_0$. Also $v(0) = 20$ m/s und $v(2) = 10$ m/s.
d) Bei $t = 4$ ist $v(4) = 0$, das Auto steht. Der Bremsweg ist $s(4) = 40$ m. Die Anfangsgeschwindigkeit war 20 m/s $= 20 \cdot 3{,}6 = 72$ km/h.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $h(10) = 2 \cdot 100 = 200$ m.
b) $\frac{200-0}{10} = 20$ m/s und $\frac{h(10)-h(5)}{5} = \frac{200-50}{5} = 30$ m/s.
c) $\frac{2(10+k)^2-200}{k} = \frac{40k+2k^2}{k} = 40 + 2k \to 40$ m/s. Nach 10 s steigt die Rakete momentan mit 40 m/s.
d) Es gilt 20. Die Rakete wird immer schneller. Je näher das Intervall am Zeitpunkt $t = 10$ liegt, desto näher liegt die mittlere an der momentanen Geschwindigkeit.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $\frac{51\,700-48\,200}{5} = \frac{3500}{5} = 700$; $\frac{54\,100-51\,700}{5} = \frac{2400}{5} = 480$; $\frac{55\,300-54\,100}{4} = \frac{1200}{4} = 300$ Einwohner pro Jahr.
b) Die Raten sind alle positiv, die Stadt wächst also. Sie werden aber kleiner: von 700 über 480 auf 300. Das Wachstum verlangsamt sich.
c) Von 2024 bis 2030 sind es 6 Jahre: $55\,300 + 6 \cdot 300 = 57\,100$ Einwohner.
d) Bekannt sind nur die Werte am Anfang und Ende jedes Zeitraums. Was dazwischen passiert, zum Beispiel Schwankungen von Jahr zu Jahr, sieht man nicht.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $40 - 10 = 30$, $65 - 40 = 25$, $85 - 65 = 20$, $95 - 85 = 10$ Prozentpunkte pro Stunde.
b) Die Raten sind positiv, der Akku wird also immer voller. Sie nehmen aber ab: zu Beginn lädt das Handy schnell, gegen Ende langsam.
c) Sinkt die Rate um weitere 10, liegt sie in Stunde 5 bei etwa 0. Der Ladestand bleibt dann bei etwa $95\,\%$, höchstens $100\,\%$.
d) Ladegeräte verringern bei hohem Ladestand die Stromstärke. Das schützt den Akku vor Überhitzung und Überladung.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $h(0{,}5) = 1 + 4 - 1{,}25 = 3{,}75$ m und $h(1) = 1 + 8 - 5 = 4$ m.

b) $\frac{h(1)-h(0)}{1} = \frac{4-1}{1} = 3$ m/s und $\frac{h(1)-h(0{,}5)}{0{,}5} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$ m/s. Der Ball wird beim Steigen langsamer.
c) Mit der Zeitänderung k: $\frac{8k-5(2t_0k+k^2)}{k} = 8-10t_0-5k \to 8-10t_0$. Bei $t_0 = 0{,}5$: $8-5 = 3$ m/s.
d) $8-10t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0{,}8$ s. Dann ist $h(0{,}8) = 1+6{,}4-3{,}2 = 4{,}2$ m. Das ist der höchste Punkt der Flugbahn.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Jedes Intervall dauert 5 min: $\frac{60-80}{5} = -4$; $\frac{48-60}{5} = -2{,}4$; $\frac{40-48}{5} = -1{,}6$; $\frac{35-40}{5} = -1$ °C pro Minute.
b) Die Raten sind negativ und werden betragsmäßig kleiner: Der Kaffee kühlt immer langsamer ab. Grund: Der Temperaturunterschied zur Umgebung wird kleiner.
c) Nach 10 min sind es 48 °C, dann sinkt die Temperatur im Mittel um $1{,}6$ °C pro Minute: $48 - 2 \cdot 1{,}6 = 44{,}8$ °C.
d) Nach c) ist der Kaffee nach etwa 12 Minuten bei 45 °C. Ab etwa 12 bis 13 Minuten ist er gut trinkbar.

Lösung zu Aufgabe 15

a) 10 min sind $\frac{1}{6}$ h: $\frac{18}{1/6} = 108$; $\frac{17}{1/6} = 102$; $\frac{15}{1/6} = 90$; $\frac{16}{1/6} = 96$ km/h.
b) Im Baustellenabschnitt fuhr der Bus im Mittel 102 km/h, also 2 km/h zu schnell. Er hat sich nicht an Tempo 100 gehalten.
c) Gesamtstrecke 66 km in 40 min $= \frac{2}{3}$ h: $\frac{66}{2/3} = 99$ km/h.
d) Ja. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beschreibt nur das ganze Intervall. Kurzzeitig kann der Bus schneller oder langsamer gefahren sein, zum Beispiel beim Überholen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\frac{(x_0+h)^2-4(x_0+h)-x_0^2+4x_0}{h} = \frac{2x_0h+h^2-4h}{h} = 2x_0+h-4 \to 2x_0-4$. Also $f'(x_0) = 2x_0-4$.
b) $2x_0-4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$. Dort liegt der Scheitel $S(2\,|\,-4)$, die Tangente ist waagerecht.
c) $f'(0) = -4$, $f'(1) = -2$, $f'(4) = 4$. Links vom Scheitel ist die Ableitung negativ (der Graph fällt), rechts davon positiv (er steigt).
d) $\frac{f(4)-f(0)}{4} = \frac{0-0}{4} = 0$. Die mittlere Rate auf $[0;4]$ ist 0. Sie stimmt mit $f'(2) = 0$ in der Intervallmitte überein, nicht aber mit den Raten an den Rändern.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $h = 0{,}1$: $\frac{|0{,}1|-0}{0{,}1} = 1$. $h = -0{,}1$: $\frac{|-0{,}1|-0}{-0{,}1} = \frac{0{,}1}{-0{,}1} = -1$.
b) Für $h > 0$ ist der Quotient immer $\frac{h}{h} = 1$, für h immer $\frac{-h}{h} = -1$. Von rechts ergibt sich $+1$, von links -1.
c) Die einseitigen Grenzwerte sind verschieden. Also existiert der Grenzwert nicht: f ist

an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Der Graph hat dort einen Knick.
d) In der Nähe von $x_0 = 2$ ist $f(x) = x$, denn $x > 0$. Also $f'(2) = 1$: Dort ist f differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Sekantensteigung: $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9-4}{1} = 5$.
b) Mit $f'(x) = 2x$ ist die Tangentensteigung $f'(2) = 4$. Sie ist kleiner als die Sekantensteigung, weil die Parabel rechts von P steiler wird.
c) Punkt-Steigungs-Form: $y = 4(x-2)+4 = 4x-4$. Probe: Für $x = 3$ liefert sie 8, die Tangente geht durch $(3\,|\,8)$ und liegt unter $Q(3\,|\,9)$.
d) Q muss näher an P rücken, zum Beispiel $Q(2{,}1\,|\,4{,}41)$. Die Sekante hat dann die Steigung $\frac{0{,}41}{0{,}1} = 4{,}1$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Linker Teil: $f(1) = 1^2 = 1$. Rechter Teil bei $x \to 1$: $2 \cdot 1 - 1 = 1$. Beide Teile treffen sich in $(1\,|\,1)$, f ist dort stetig.
b) Für h gilt der linke Teil: $\frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h \to 2$.
c) Für $h > 0$ gilt der rechte Teil: $\frac{2(1+h)-1-1}{h} = \frac{2h}{h} = 2$.
d) Beide Grenzwerte sind 2. Also ist f bei $x_0 = 1$ differenzierbar mit $f'(1) = 2$. Die Gerade ist genau die Tangente an die Parabel, der Übergang ist knickfrei.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $h(100) = \frac{10\,000}{200} = 50$ m, $h(0) = 0$. Mittlere Steigung $\frac{50}{100} = 0{,}5 = 50\,\%$.
b) $\frac{\frac{1}{200}(x_0+k)^2 - \frac{1}{200}x_0^2}{k} = \frac{2x_0k+k^2}{200k} = \frac{x_0}{100} + \frac{k}{200} \to \frac{x_0}{100}$. Also $h'(60) = 0{,}6 = 60\,\%$ und $h'(100) = 1 = 100\,\%$.
c) $\frac{x_0}{100} = 0{,}5 \Rightarrow x_0 = 50$, genau die Intervallmitte. Bei Parabeln ist die mittlere Steigung immer gleich der Steigung in der Mitte.
d) $\frac{x_0}{100} = 0{,}08 \Rightarrow x_0 = 8$. Ab 8 m nach dem Start ist die Steigung mindestens $8\,\%$, das Schild gilt also fast für den ganzen Weg.