Lösungen zur Klassenarbeit - Ableitungsregeln

Klasse: Einfuehrungsphase · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (3 BE/Punkte)

a) Man leitet summandenweise ab (Summenregel) und verwendet für jede Potenz die Potenzregel $(x^n)' = nx^{n-1}$ mit Faktorregel: $(4x^3)' = 12x^2$, $(-5x^2)' = -10x$, $(x)' = 1$; die Konstante -9 fällt weg, weil sie die Steigung nicht beeinflusst. Also $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$ (1 P.).

b) Bruch und Wurzel werden zuerst als Potenzen geschrieben: $g(x) = 6x^{-2} + 3x^{1/2}$ (1 P.). Dann gilt die Potenzregel auch für negative und gebrochene Exponenten: $g'(x) = -12x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-1/2} = -\frac{12}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$, definiert für $x > 0$ (1 P.).

c) Ohne Produktregel multipliziert man zuerst aus: $h(x) = x^2 + 3x - 10$, also $h'(x) = 2x + 3$ (1 P.). Häufiger Fehler: die Faktoren einzeln ableiten und multiplizieren, das ergäbe falsch $1 \cdot 1 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Potenzregel summandenweise: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ (1 P.). An der Stelle $x_0 = 3$: $f'(3) = 3 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9$. Der Graph steigt dort mit der Steigung 9, sehr steil, sein Steigungswinkel beträgt etwa $83{,}7^\circ$ (1 P.).

b) Eine waagerechte Tangente hat die Steigung 0, also löst man $f'(x) = 0$. Ausklammern: $3x(x-2) = 0$, daher $x_1 = 0$ oder $x_2 = 2$ (1 P.). Die zugehörigen y-Werte berechnet man mit f, nicht mit f': $f(0) = 2$ und $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$. Die Punkte mit waagerechter Tangente sind $(0|2)$ und $(2|-2)$ (1 P.). Es handelt sich um den Hochpunkt und den Tiefpunkt des Graphen, weil f' dort jeweils das Vorzeichen wechselt.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Die Geschwindigkeit ist die momentane Änderungsrate des Weges, also die Ableitung: $v(t) = s'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t + 2 = t + 2$. Nach 10 s: $v(10) = 12$ m/s. Umrechnung mit dem Faktor $3{,}6$: $12 \cdot 3{,}6 = 43{,}2$ km/h (1 P.).

b) Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit: $a(t) = v'(t) = 1\,\mathrm{m/s^2}$ (1 P.). Sie ist konstant, der Bus wird also in jeder Sekunde um 1 m/s schneller. Der Summand $2t$ im Weg bedeutet, dass der Bus beim Start schon 2 m/s fährt.

c) Zuerst Einheiten angleichen: 36 km/h $= 36 : 3{,}6 = 10$ m/s (1 P.). Dann $t + 2 = 10$, also $t = 8$ s (1 P.). Probe: $v(8) = 10$ m/s. Antwort: $43{,}2$ km/h nach 10 s, Beschleunigung $1\,\mathrm{m/s^2}$, 36 km/h nach 8 s.

Lösung zu Aufgabe 4 (6 BE/Punkte)

a) $G'(x) = -2x + 10$ (1 P.).
b) Notwendige Bedingung für ein Maximum: $G'(x) = 0$, also $-2x + 10 = 0$ und $x = 5$. Da $G''(x) = -2 < 0$, liegt ein Hochpunkt vor (1 P.). $G(5) = -25 + 50 - 16 = 9$. Bei 500 verkauften Pflanzen ist der Gewinn mit 9 Hundert Euro, also 900 €, am größten (1 P.).
c) Nullstellen: $-x^2 + 10x - 16 = 0$ wird mit -1 multipliziert zu $x^2 - 10x + 16 = 0$; Faktorisieren liefert $(x - 2)(x - 8) = 0$, also $x = 2$ oder $x = 8$ (1 P.). Die Parabel ist nach unten geöffnet, daher ist G nur zwischen den Nullstellen positiv: Verlust bei weniger als 200 oder mehr als 800 Pflanzen (1 P.).
d) $G'(2) = -4 + 10 = 6$. Bei 200 Pflanzen wächst der Gewinn momentan um 6 Hundert Euro je hundert weitere Pflanzen, also etwa 6 € pro zusätzlicher Pflanze (1 P.).

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Zwei unbekannte Parameter verlangen zwei Bedingungen. Der Funktionswert liefert: $f(1) = 1^2 + b \cdot 1 + c = 4$, also $1 + b + c = 4$. Für die Steigung braucht man die Ableitung $f'(x) = 2x + b$; aus $f'(1) = 3$ folgt $2 + b = 3$ (1 P.).
b) Die zweite Gleichung enthält nur b und ergibt sofort $b = 1$ (1 P.). Eingesetzt in die erste: $1 + 1 + c = 4$, also $c = 2$. Die gesuchte Parabel lautet $f(x) = x^2 + x + 2$ (1 P.). Probe: $f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$ und $f'(1) = 2 + 1 = 3$, beide Bedingungen sind erfüllt. Deutung: Die Parabel geht durch $P(1|4)$ und hat dort die Tangente $y = 3x + 1$.
Antwort: $b = 1$, $c = 2$.