Lernzettel - Ableitungsregeln

Klasse: Einfuehrungsphase

Einstieg: Steigung auf Knopfdruck

Du stehst auf einer Skateanlage und willst wissen, wie steil die Rampe an jeder Stelle ist. Mit der h-Methode müsstest du für jede Stelle einen Grenzwert berechnen. Das dauert ewig. Mit den Ableitungsregeln schreibst du dagegen die Steigungsfunktion f' in einer Zeile hin und kannst danach jede Steigung durch Einsetzen ablesen. In diesem Kapitel lernst du die wichtigsten Regeln, übst das sichere Ableiten von Potenzen, Wurzeln und Brüchen und wendest die Ableitung in Sachaufgaben an: bei Geschwindigkeiten, Kosten und Gewinnen.

Warum Ableitungsregeln?

Mit der h-Methode kannst du Ableitungen berechnen, aber der Aufwand ist groß. Zum Glück gibt es Regeln, mit denen du die Ableitungsfunktion f' direkt hinschreiben kannst. Die wichtigste ist die Potenzregel, dazu kommen Faktor-, Summen- und Konstantenregel. Mit diesen Regeln lässt sich jede ganzrationale Funktion ableiten.

Die Regeln im Überblick

- **Konstantenregel:** $f(x) = c \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$.
- **Potenzregel:** $f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Dabei ist n eine Zahl, auch negativ oder ein Bruch.
- **Faktorregel:** $f(x) = c \cdot g(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = c \cdot g'(x)$.
- **Summenregel:** $f(x) = g(x) + h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = g'(x) + h'(x)$ (ebenso bei der Differenz).

Merke: Der Exponent wird zum Faktor, und der Exponent wird um 1 kleiner. Aus x^1 wird dabei $1 \cdot x^0 = 1$, also $(x)' = 1$.

Beispiele für ganzrationale Funktionen

Beispiel 1. $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$.

Beispiel 2. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + x - 7$. Jeder Summand wird einzeln abgeleitet: $f'(x) = 12x^2 - 12x + 1$. Die Konstante -7 fällt weg.

Beispiel 3. $f(x) = 0{,}5x^4 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + 2$.

Beispiel 4 (erst ausmultiplizieren). $f(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow f'(x) = 2x + 6$. Eine Produktregel brauchst du hier nicht, wenn du zuerst die Klammern auflöst. Genauso gilt $g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x \Rightarrow g'(x) = 2x - 3$.

Wurzeln und Brüche als Potenzen

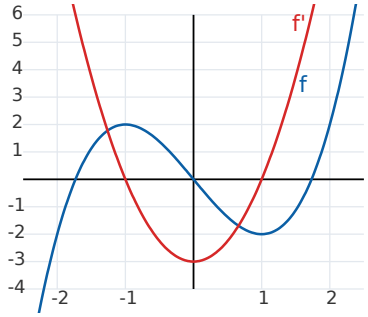
Die Potenzregel gilt auch für andere Exponenten, wenn du die Funktion zuerst als Potenz schreibst: $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\frac{3}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}$ und $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Höhere Ableitungen

Die Ableitung von f' heißt zweite Ableitung f'', die Ableitung von f'' heißt dritte Ableitung f'''. Beispiel: $f(x) = x^4 - 2x^3$, dann $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$, $f'''(x) = 24x - 12$. Die zweite Ableitung beschreibt, wie sich die Steigung ändert. Beim Weg $s(t)$ ist $s'(t) = v(t)$ die Geschwindigkeit und $s''(t) = a(t)$ die Beschleunigung.

Ableitung auswerten und Steigung bestimmen

Setzt du eine Stelle x_0 in f' ein, erhältst du die Steigung der Tangente in $(x_0 \,|\, f(x_0))$. Für $f(x) = x^3 - 3x$ gilt $f'(x) = 3x^2 - 3$. Dann ist $f'(2) = 9$. Die Gleichung $f'(x) = 0$ liefert die Stellen mit waagerechter Tangente: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.



Die Abbildung zeigt $f(x) = x^3 - 3x$ (blau) und die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 3$ (rot). Dort, wo f' die x-Achse schneidet (bei $x = \pm 1$), hat f eine waagerechte Tangente. Wo f' negativ ist, fällt f.

Warum die Potenzregel stimmt

Für $f(x) = x^3$ gilt nach der h-Methode $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$, und für $h \to 0$ bleibt $3x^2$. Das ist genau $3 \cdot x^{3-1}$. Dasselbe Muster ergibt sich für jede Potenz: Beim Ausmultiplizieren von $(x+h)^n$ bleibt nach dem Subtrahieren von x^n als niedrigster Term $n\,x^{n-1}h$ übrig, alle anderen enthalten höhere Potenzen von h und verschwinden im Grenzwert. Du musst den Beweis nicht auswendig lernen, aber er zeigt dir, dass die Regel kein Zufall ist.

Ausführliches Beispiel

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$. Gesucht sind die Stellen mit waagerechter Tangente. Zuerst leitest du ab: $f'(x) = x^3 - 4x$. Dann setzt du $f'(x) = 0$: $x(x^2 - 4) = 0$, also $x = 0$, $x = 2$ oder $x = -2$. Die Funktionswerte sind $f(0) = 3$, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ und $f(-2) = -1$. Die Punkte mit waagerechter Tangente sind also $(0 \,|\, 3)$, $(2 \,|\, -1)$ und

$(-2\,|\,-1)$. Genau diese Rechnung brauchst du im nächsten Kapitel für die Untersuchung von Extrempunkten.

Ableiten in Sachaufgaben

Im Sachzusammenhang liefert die Ableitung die Änderungsrate. Ist $G(x)$ der Gewinn eines Betriebs bei x verkauften Stück, so ist $G'(x)$ der zusätzliche Gewinn je weiterem Stück. Ist $h(t)$ die Höhe eines Drachens, so gibt $h'(t)$ die Steiggeschwindigkeit an. Gib das Ergebnis immer mit der passenden Einheit an, zum Beispiel Euro pro Stück oder Meter pro Sekunde, und deute es in einem Satz.

Kontrolle mit der Skizze

Vergleiche immer das Verhalten von f mit dem Vorzeichen von f': Ist $f'(x) > 0$, steigt der Graph von f, ist $f'(x)$, fällt er. Passt das nicht zu deiner Skizze oder zum Wertetabellenvergleich, hast du dich beim Ableiten verrechnet. Diese Kontrolle dauert nur wenige Sekunden und erspart dir Folgefehler in späteren Teilaufgaben, etwa bei der Tangentengleichung oder der Extremwertbestimmung.

Definition: Ableitungsfunktion

Die Funktion f', die jeder Stelle x die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion** (kurz: Ableitung) von f. Gibt es an jeder Stelle eine eindeutige Tangente, heißt f **differenzierbar**. Alle Polynomfunktionen sind überall differenzierbar.

Merke: Die vier Grundregeln

- Konstantenregel: $(c)' = 0$.
- Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
- Faktorregel: $(c \cdot g(x))' = c \cdot g'(x)$.
- Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$.

So gehst du vor: Ein Polynom ableiten

1. Zerlege die Funktion in einzelne Summanden (Klammern vorher ausmultiplizieren).
2. Schreibe jeden Summanden als Konstante mal Potenz, zum Beispiel $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$.
3. Wende auf jeden Summanden die Potenzregel an: Exponent nach vorn, Exponent um 1 verkleinern.
4. Fasse zusammen und prüfe mit einer Probe an einer Stelle (zum Beispiel mit $h = 0{,}01$).

Beispiel 5

Leite $f(x) = 5x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 8x - 11$ ab.

Summand für Summand: $(5x^4)' = 20x^3$, $(-\frac{2}{3}x^3)' = -2x^2$, $(8x)' = 8$ und $(-11)' = 0$. Also $f'(x) = 20x^3 - 2x^2 + 8$.

Beispiel 6

Leite $g(x) = \frac{4}{x^3} + 6\sqrt{x}$ ab.

Erst als Potenzen schreiben: $g(x) = 4x^{-3} + 6x^{\frac{1}{2}}$. Dann ableiten:
$g'(x) = 4 \cdot (-3)x^{-4} + 6 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -12x^{-4} + 3x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{12}{x^4} + \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Beispiel 7

Welche Steigung hat der Graph von $f(x) = x^3 - 6x$ an der Stelle $x_0 = 2$? Wo ist die Tangente waagerecht?

Es gilt $f'(x) = 3x^2 - 6$. Einsetzen: $f'(2) = 12 - 6 = 6$. Für waagerechte Tangenten gilt $f'(x) = 0$: $3x^2 = 6$, also $x^2 = 2$ und $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$.

Hinweis: Das Zeichen für die Ableitung

In Schulbüchern findest du für die Ableitung die Schreibweisen $f'(x)$ (Newton/Lagrange) und $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (Leibniz). In der Physik schreibt man für die Ableitung nach der Zeit oft einen Punkt: $\dot{s} = v$. Für die Einführungsphase genügt $f'(x)$, aber du solltest die anderen Schreibweisen wiedererkennen.

Definition: Grenzkosten und Grenzgewinn

In der Wirtschaft nennt man die Ableitung einer Kostenfunktion K die **Grenzkosten** $K'(x)$. Sie geben näherungsweise an, wie viel die Herstellung der $(x+1)$-ten Einheit zusätzlich kostet. Genauso ist $G'(x)$ der **Grenzgewinn**. Wo G' das Vorzeichen von Plus nach Minus wechselt, liegt ein Gewinnmaximum.

Beispiel 8

Eine Bäckerei hat die Kostenfunktion $K(x) = 0{,}02x^2 + 3x + 120$ (in Euro, x Brote pro Tag). Wie hoch sind die Grenzkosten bei $x = 100$?

$K'(x) = 0{,}04x + 3$, also $K'(100) = 7$. Das hundertunderste Brot kostet etwa 7\,€ zusätzlich. Die durchschnittlichen Kosten je Brot sind bei 100 Broten dagegen \frac{K(100)}{100}=\frac{620}{100}=6{,}20\,€.

Satz: Zusammenhang von Funktion und Ableitung

Ist $f'(x) > 0$ auf einem Intervall, so steigt der Graph von f dort. Ist $f'(x)$, so fällt er. An einer Stelle mit $f'(x) = 0$ ist die Tangente waagerecht. Diese Aussage nutzt du im

Kapitel zur Kurvendiskussion, um Hoch- und Tiefpunkte zu finden. Hast du beim Ableiten ein Vorzeichen verwechselt, zeigt dir schon eine grobe Skizze, dass etwas nicht stimmen kann.

Achtung

Die Summenregel gilt nur für Summen und Differenzen. Ein **Produkt** darfst du nicht faktorweise ableiten: $(x^2 \cdot x^3)' \neq 2x \cdot 3x^2$. Multipliziere erst aus: $x^2 \cdot x^3 = x^5$, also $(x^5)' = 5x^4$. Die Produktregel lernst du später kennen. Auch Quotienten wie $\frac{x^2+1}{x}$ leitest du jetzt nur ab, indem du zuerst kürzt: $x + x^{-1}$.

Beispiel 9

Leite $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x}$ ab.

Zuerst kürzen (für $x \neq 0$): $f(x) = x^2 + 2x$. Dann ist $f'(x) = 2x + 2$. Würdest du Zähler und Nenner getrennt ableiten, bekämst du ein falsches Ergebnis.

Wusstest du?

Die Schreibweise f' geht auf den Mathematiker Joseph-Louis Lagrange zurück (18. Jahrhundert). Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelten die Differenzialrechnung unabhängig voneinander im 17. Jahrhundert und stritten jahrelang darüber, wer sie zuerst erfunden hatte. Heute berechnen Wetterdienste, Ingenieure und Ökonomen mit Ableitungen täglich Änderungsraten.

So gehst du vor: Aufgaben mit Ableitung im Sachzusammenhang

1. Lies die Aufgabe und notiere, welche Größe die Funktion beschreibt und in welcher Einheit.
2. Bilde die Ableitung und überlege, was sie bedeutet (Geschwindigkeit, Grenzkosten, Zuwachsrate).
3. Setze die gesuchte Stelle ein oder löse $f'(x) = 0$.
4. Schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 10

Ein Wasserbehälter wird gefüllt. Die Wassermenge ist $V(t) = 0{,}5t^3 - 3t^2 + 12t$ Liter nach t Minuten. Wie schnell fließt das Wasser nach vier Minuten zu?

Die Zuflussrate ist die Ableitung: $V'(t) = 1{,}5t^2 - 6t + 12$. Für $t = 4$ gilt $V'(4) = 24 - 24 + 12 = 12$. Nach vier Minuten fließen also 12 Liter pro Minute zu. Ob die Rate steigt oder fällt, zeigt $V(t) = 3t - 6$: Für $t > 2$ wird der Zufluss immer stärker.

Merke: Typische Rechenwege auf einen Blick

Wenn du eine Aufgabe zur Ableitung bekommst, hilft eine feste Reihenfolge. Zuerst bringst du den Funktionsterm in eine Summe von Potenzen. Dann leitest du jeden Summanden mit der Potenzregel ab. Anschließend setzt du entweder eine Stelle ein, um eine Steigung oder eine Änderungsrate zu erhalten, oder du löst $f'(x) = 0$, um waagerechte Tangenten zu finden. Zum Schluss prüfst du dein Ergebnis mit einer Skizze oder einer Probe und formulierst einen Antwortsatz. Wer diese Schritte jedes Mal gleich durchläuft, macht deutlich weniger Flüchtigkeitsfehler.

Achtung

Bei der zweiten Ableitung wird oft vergessen, dass man die **bereits abgeleitete** Funktion noch einmal ableitet. Aus $f(x) = x^4$ wird $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$, nicht $f''(x) = 4x^2$. Ebenso fällt bei der zweiten Ableitung ein linearer Summand bx vollständig weg, denn seine erste Ableitung ist nur noch die Konstante b.

Häufige Fehler

- Den Exponenten nicht um 1 verkleinern: $(x^4)' = 4x^3$, nicht $4x^4$.
- Konstante Summanden nicht weglassen: $(x^2 + 5)' = 2x$, nicht $2x + 5$.
- Faktoren nicht mitableiten lassen: $(3x^2)' = 6x$, und der Faktor 3 bleibt erhalten.
- $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ nicht erst umschreiben und dann falsche Exponenten verwenden.
- Bei $(x + 3)^2$ nicht $2(x + 3)$ mit $2x$ verwechseln; ausmultiplizieren oder die Kettenregel (später) nutzen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Konstanten fallen beim Ableiten weg: $(c)' = 0$; der Faktor vor x bleibt: $(cx)' = c$.
- Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ gilt auch für negative und gebrochene Exponenten.
- Summen und Differenzen leitest du Glied für Glied ab; Produkte und Quotienten zuerst ausmultiplizieren oder kürzen.
- Wurzeln und Brüche vorher als Potenzen schreiben: $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.
- $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente; $f'(x) = 0$ liefert waagerechte Tangenten.
- $f' > 0$: f steigt; f': f fällt. Das hilft bei der Kontrolle.
- Höhere Ableitungen: f'' ist die Ableitung von f'; bei $s(t)$ sind $s' = v$ und $s'' = a$.
- Im Sachzusammenhang ist f' die lokale Änderungsrate (Grenzkosten, Geschwindigkeit) und braucht eine Einheit.

Ottos Tipp

Otto der Hibou rät: Prüfe jedes Ergebnis mit einer Stelle. Rechne den Differenzenquotienten für $h = 0{,}01$ aus und vergleiche mit $f'(x_0)$. Wenn die beiden Werte fast übereinstimmen, hast du richtig abgeleitet. In der Klausur lohnt sich so eine kurze Probe bei schwierigen Termen.

Zusammenfassung

Ableiten heißt: Konstante weg, Exponent als Faktor nach vorn, Exponent um 1 verringern, Summanden einzeln behandeln. Mit f' bestimmst du Steigungen, Tangenten, Extrempunkte und Änderungsraten in Sachaufgaben. Übe die Regeln, bis du sie ohne Nachdenken anwenden kannst, denn sie begleiten dich durch die gesamte Oberstufe.