Arbeitsblatt - Ableitungsregeln

Klasse: Einfuehrungsphase · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Potenzregel üben

Die Potenzregel $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ ist das wichtigste Werkzeug beim Ableiten. Wende sie an und begründe jeweils kurz, was mit dem Faktor und dem Exponenten passiert.

a) $f(x) = x^7$
b) $g(x) = 5x^4$
c) $h(x) = -2x^3$
d) $k(x) = x$
e) $m(x) = 9$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Summen ableiten

Leite jede Funktion ab. Schreibe jeden Summanden einzeln auf.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 2$
b) $g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 6x^2$
c) $h(x) = -x^5 + 3x^3 - x$
d) $k(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}5x^2 + 4$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Brüche und Wurzeln

Schreibe zuerst als Potenz mit negativem oder gebrochenem Exponenten und leite dann ab. Gib das Ergebnis wieder ohne negative Exponenten an.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$
b) $g(x) = \frac{3}{x^2}$
c) $h(x) = \sqrt{x}$
d) $k(x) = 4\sqrt{x}$
e) $m(x) = \frac{2}{x^3} + x$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Erst ausmultiplizieren

Bei Produkten und Klammern hilft es, zuerst auszumultiplizieren. Berechne dann die Ableitung.

a) $f(x) = (x+2)^2$
b) $g(x) = x(x-4)$
c) $h(x) = (2x-1)(x+3)$
d) $k(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Höhere Ableitungen

Die zweite Ableitung f'' ist die Ableitung von f'. Berechne f', f'' und f''' für die folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^4 - 2x^3$
b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 5x$
c) $h(x) = 2x^5$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Steigung an einer Stelle

Berechne die Steigung des Graphen von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ an den angegebenen Stellen und gib an, ob der Graph dort steigt oder fällt.

a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 2$
d) $x_0 = -1$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Der Ballon

Ein Heißluftballon startet im Stadtpark. Seine Höhe über dem Boden beträgt nach t Minuten $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t + 20$ (in Metern, $0 \le t \le 12$).

a) Berechne die Starthöhe und die Höhe nach 4 Minuten.
b) Bestimme $h'(t)$ und deute $h'(2)$.
c) Wann steigt der Ballon nicht mehr (waagerechte Tangente)? Wie hoch ist er dann?
d) Wann sinkt der Ballon?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Die Radtour

Lena fährt mit dem Rad zum Badesee. Ihr zurückgelegter Weg ist näherungsweise $s(t) = 0{,}05t^3 - 0{,}9t^2 + 6t$ (t in Minuten, s in Hundert Metern).

a) Bestimme die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$.
b) Wie schnell ist sie nach 5 Minuten (in Hundert Metern pro Minute und in km/h)?
c) Berechne die Beschleunigung $a(t) = s''(t)$ und die Zeit, zu der Lena am langsamsten

ist.
d) Wie schnell ist sie dann?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Kosten in der Eisdiele

Eine kleine Eisdiele stellt Eis selbst her. Die Kosten für x Liter Eis pro Tag betragen $K(x) = 0{,}05x^2 + 2x + 60$ (in Euro).

a) Wie hoch sind die Fixkosten?
b) Berechne die Grenzkosten $K'(x)$ und $K'(20)$.
c) Bei welcher Menge betragen die Grenzkosten genau 5\,€?
d) Die Eisdiele verkauft den Liter für $6{,}50$\,€. Lohnt sich ein zusätzlicher Liter bei $x = 30$?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Waagerechte Tangenten

Bestimme alle Punkte des Graphen, in denen die Tangente waagerecht ist.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
b) $g(x) = x^3 - 12x$
c) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Quarterpipe

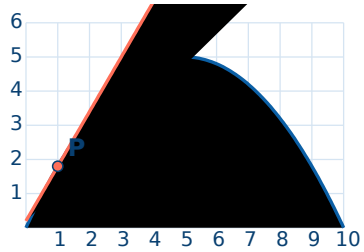
Das Profil einer Anlaufbahn wird durch $h(x) = \frac{1}{40}x^2$ beschrieben (x und h in Metern, Gefälle nach unten ist hier als Höhenzuwachs gezählt). Die Steigung $h'(x)$ beschreibt, wie steil die Bahn ist.

a) Berechne $h'(x)$.
b) Wie steil ist die Rampe bei $x = 10$, $x = 20$ und $x = 40$ (in Prozent)?
c) Wo beträgt die Steigung $100\,\%$ (also 45°)?
d) Warum ist die Rampe am Anfang flach?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Brücke

Der Bogen einer Fußgängerbrücke hat die Form $f(x) = -\frac{1}{5}(x - 5)^2 + 5$ (in Metern). Im Punkt $P(1 \mid f(1))$ soll ein Geländer angebracht werden, das parallel zur Tangente verläuft.



a) Multipliziere die Klammer aus und leite ab.
b) Berechne $f(1)$ und die Steigung $f'(1)$.
c) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt P.
d) An welcher Stelle liegt der höchste Punkt der Brücke?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Temperatur im Gewächshaus

Die Temperatur im Gewächshaus eines Gartenbetriebs folgt zwischen 6 und 18 Uhr näherungsweise der Funktion $T(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 6t - 20$ (t in Stunden nach Mitternacht, T in Grad Celsius).

a) Welche Temperatur herrscht um 8 Uhr und um 12 Uhr?
b) Berechne $T'(t)$. Wie schnell ändert sich die Temperatur um 8 Uhr?
c) Wann ist es am wärmsten? Wie warm wird es?
d) Ab wann kühlt das Gewächshaus ab?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Wasserstand im Schwimmbecken

Das Wasser im Kinderbecken wird abgelassen. Die Wassermenge beträgt nach t Minuten $V(t) = 2000 - 40t + \frac{1}{5}t^2$ Liter ($0 \le t \le 100$).

a) Wie viel Wasser ist zu Beginn im Becken?
b) Bestimme die Abflussrate $V'(t)$.
c) Wie schnell läuft das Wasser nach 10 Minuten ab?
d) Wann ist die Abflussrate Null? Was bedeutet das?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Gewinn des Schulkiosks

Der Schulkiosk verkauft Brezeln. Der Gewinn pro Woche in Abhängigkeit von der Zahl x der verkauften Brezeln (in Hundert) ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst und wird durch $G(x) = -2x^2 + 24x - 40$ (in Euro) modelliert.

x (Hundert)	2	4	6	8	10
$G(x)$ in €	0	24	32	24	0

a) Überprüfe die Tabellenwerte durch Rechnung.
b) Berechne $G'(x)$ und bestimme die Stelle, an der $G'(x) = 0$.

c) Wie viele Brezeln müssen verkauft werden, damit der Gewinn am größten ist? Wie groß ist er?
d) Der Hausmeister meint, bei 1000 Brezeln sei der Gewinn noch höher. Hat er recht?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Zwei Autos im Vergleich

Zwei Autos fahren auf einer Landstraße. Ihre Positionen (in Metern) nach t Sekunden sind $s_1(t) = 20t$ und $s_2(t) = t^2 + 5t$.

a) Bestimme die Geschwindigkeiten v_1 und v_2.
b) Wann haben beide dieselbe Geschwindigkeit?
c) Wer liegt zu diesem Zeitpunkt vorn und um wie viele Meter?
d) Wann holt das zweite Auto das erste ein?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Zuwachs der Pflanze

Ein Sonnenblumenkeimling wird täglich vermessen. Die Tabelle zeigt die Höhe (in cm). Die Werte werden durch $p(t) = 0{,}1t^2 + t$ angenähert (t in Tagen).

Tag	0	5	10	15
Höhe in cm	0	7,5	20	37,5

a) Prüfe, ob das Modell zu den Tabellenwerten passt.
b) Berechne die mittlere Wachstumsrate zwischen Tag 5 und Tag 10 und vergleiche sie mit $p'(5)$ und $p'(10)$.
c) Wann wächst die Pflanze mit 4 cm pro Tag?
d) Warum ist das Modell für lange Zeiträume unrealistisch?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Der Hügel der Achterbahn

Der erste Hügel einer Achterbahn im Freizeitpark wird zwischen $x = 0$ und $x = 15$ (in Metern) durch $h(x) = -\frac{1}{150}x^3 + \frac{1}{10}x^2 + 2$ beschrieben (h in Metern über dem Boden).

a) Berechne $h'(x)$ und klammere aus.
b) Bestimme die Stellen mit waagerechter Tangente.
c) Berechne die Höhe am Anfang, am höchsten Punkt und am Ende.
d) Wie steil ist die Bahn bei $x = 5$ und bei $x = 15$?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Knobelaufgabe: Die Ableitung von x hoch vier

Wie die Potenzregel entsteht, kannst du dir mit der h-Methode für $f(x) = x^4$

klarmachen. Der Differenzenquotient lautet $\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$.

a) Multipliziere $(x+h)^4$ mithilfe der Binomialkoeffizienten $1, 4, 6, 4, 1$ aus.
b) Subtrahiere x^4 und kürze durch h.
c) Lasse $h \to 0$ gehen und vergleiche mit der Potenzregel.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Gesucht ist die Funktion

Von einer ganzrationalen Funktion dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx$ ist bekannt, dass der Graph durch $P(1 \mid -2)$ geht und dort die Steigung 1 hat.

a) Stelle die beiden Gleichungen $f(1) = -2$ und $f'(1) = 1$ auf.
b) Löse das Gleichungssystem.
c) Gib f und f' an und prüfe die Bedingungen.